

Georg Cantor und das Unendliche

Zusammenfassung des Seminars zu „Kardinalität und Kardinäle“

I) Das Aktual-Unendliche

I.1) Definitionen

Ausgearbeitet von: Eva-Maria Pfeifer, Sabrina Vincenz

📖 Cantor, „Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre“, 1883

Cantor differenziert in seinen Grundlagen zwischen **Uneigentlich-Unendlichem** und **Eigentlich-Unendlichem**. Das Aktual-Unendliche wird hier noch nicht mit dem Eigentlich-Unendlichen identifiziert. Er beschreibt das Uneigentliche-Unendliche als unbestimmtes, veränderliches Unendliches, das immer endlich bleibt, aber entweder ganz groß oder ganz klein werden kann. „Das Uneigentlich-Unendliche ist eigentlich ein veränderliches Endliches und keine bestimmte Größe, im Gegensatz zum Eigentlich-Unendlichen, das in einer bestimmten Form auftritt“ (Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, S. 166). Ein Beispiel für das Eigentlich-Unendliche sind die unendlichen realen ganzen Zahlen.

📖 Cantor, „Zum Problem des Aktual-Unendlichen“, 1886

Er weist darauf hin, dass es in seiner Theorie nicht um das potentiell Unendliche, sondern das Aktual-Unendliche geht. Das potentielle Unendliche ist (wenn es überhaupt eine Größe ist) eine veränderliche endliche Größe. Er unterscheidet zwischen **Absolut-Unendlichem** und dem **Aktual-Unendlichen**. Das Aktual-Unendliche ist vermehrbar und das Absolute ist wesentlich unvermehrbar.

📖 Cantor, „Über die verschiedenen Standpunkte in Bezug auf das Aktual-Unendliche“, 1886a

Cantor identifiziert das Eigentlich-Unendliche mit dem **Aktual-Unendlichen**, genauso kann man unter dem **Potentiell-Unendlichen** dasselbe verstehen wie unter dem Uneigentlich-Unendlichen aus den Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Das heißt das Potentiell-Unendliche ist eine veränderliche endliche, über alle endlichen Grenzen hinaus wachsende Größe und das Aktual-Unendliche ein in sich festes, konstantes, jedoch jenseits aller endlichen Größen liegendes Quantum.

📖 Cantor, „Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten“, 1887

Das aktual Unendliche hat drei Beziehungen:

1. in Deo (höchste Vollkommenheit, unabhängiges, außerweltliches Sein): Absolutes
2. abhängige, kreatürliche Welt: Transfinites
3. in abstracto (mathematische Größe): Transfinites

Mit dem Absoluten beschäftigt sich die spekulative Theologie, mit dem Transfiniten Metaphysik und Mathematik. (vgl. S. 378)

ad 2. Infinitum creatum: aktual-unendliche Zahl der geschaffenen Einzelwesen im Weltall und auf der Erde und "aller Wahrscheinlichkeit nach" in jedem Teil des Raumes (vgl. S. 399)

Beweis des Infinitum creatum: 1) aus dem Begriff Gottes (Vollkommenheit Gottes → Möglichkeit einer aktual-unendlichen Schöpfung; Güte Gottes → Wirklichkeit und Notwendigkeit einer aktual-unendlichen Schöpfung) und 2) a posteriori zur Erklärung der Phänomene (vgl. S. 400)

Potential-Unendliches: unbestimmte, veränderliche, endliche Größe
Aktual-Unendliches: unveränderliches, bestimmtes Quantum, Konstante
(vgl. S. 401)

Potential-Unendliches: uneigentlich unendlich; nur durch ein Aktual-Unendliches möglich
(vgl. S. 404, 411)

Transfinites: vermehrbares Aktual-Unendliches
Absolutes: unvermehrbares Aktual-Unendliches; absolutes Maximum, das menschliche Fassungskraft übersteigt;
(vgl. S. 405)

Da sich Cantor in den „Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre“ mit dem aristotelischen Satz „infinitum actu non datur“ (es gibt kein Aktual-Unendliches) beschäftigt, indem er nachforscht ob mit dem infinitum actu auch das Uneigentlich-Unendliche gemeint sein könnte, sieht man, dass dort das Uneigentlich-Unendliche noch nicht mit dem Potentiell-Unendlichen identifiziert wird. Er denkt zwar, dass das infinitum actu nicht das Uneigentlich-Unendliche sein kann, aber er ist sicher nicht ganz sicher, was eben darauf schließen lässt, dass die begriffliche Identifizierung noch nicht vollzogen worden ist.

Weiters schreibt er in seinem Aufsatz „Über die verschiedenen Standpunkte in Bezug auf das Aktual-Unendliche“, dass es in seiner Theorie unendlicher Zahlen nicht um ein Potentiell-Unendliches gehe, sondern um aktual-unendliche Größen.

Cantor unterscheidet das Aktual-Unendliche unterschiedlich detailliert: manchmal unterscheidet er „nur“ zwischen dem **Absoluten** und dem **Transfiniten**, wobei das Absolute allein Gott ist und in den Bereich des Transfiniten fallen seine unendlichen Kardinal- und Ordinalzahlen. Andere Male unterscheidet er zwischen dem Absoluten, einem Transfinitum in concreto und einem Transfinitum in abstracto:

Das Absolute: in Deo extramundano aeterno omnipotenti sive natura naturante: das heißt die absolute Unendlichkeit Gottes

In concreto: seu in natura naturata = Transfinitum: das heißt die transfinite Unendlichkeit der Welt der konkreten Dinge

In abstracto: Aktual-Unendliche = transfinite Zahlen: das heißt die transfinite Unendlichkeit der abstrakten Zahlen

Er klassifiziert hier auch eine Reihe von Philosophen, je nach dem wie sie zu den beiden Arten des Transfiniten standen:

- Ablehnung des Aktual-Unendlichen sowohl in concreto, als auch in abstracto: Gerdil, Chauchy, Moigno, Renouvier
- Aktual-Unendliches in concreto, aber nicht in abstracto: Descartes, Spinoza, Leibniz, Locke
- Aktual-Unendliches in abstracto, aber nicht in concreto: Neuscholastiker (zum Beispiel Carbonelle)
- Aktual-Unendliches in abstracto und in concreto: Cantor selbst

Cantor erwähnt auch das Infinitum in natura naturata (Unendliches in der erschaffenen Natur) (heißt auch Infinitum in natura creata) im Gegensatz zum Infinitum in natura naturans (Unendliches in der erschaffenen Natura, d.i. in Gott).

Vertragen sich die verschiedenen Unterscheidungen bei Cantor?

„Cantor betonte immer wieder, dass das Transfinite mit dem Endlichen die Eigenschaft teile, weiter vermehrbar, sogar unbegrenzt vermehrbar zu sein, während das Absolute prinzipiell unvermehrbar sei.“ (Tapp, *Kardinalität und Kardinäle*, S. 80). Cantor nennt das Transfinite beschränkt, obwohl er das Transfinite als ein vermehrbares Aktual-Unendliches definiert hat. Das Transfinite ist beschränkt in mehreren Sinnen: jede einzelne transfinite Zahl ist durch eine größere transfinite Zahl beschränkt, das Transfinite generell ist durch das Absolute beschränkt. Nun, wenn das Transfinite beschränkt ist, ist es dann nicht endlich? Hier kommen die verschiedenen Anschauungen des Unendlichkeitsbegriffs zu tragen, denn in der Theologie wurde Unendlichkeit so beschrieben, als etwas in jeder Hinsicht grenzenloses, ein absolut Unbegrenztes, also Gott.

Zu jeder transfiniten Zahl gibt es eine größere transfinite Zahl. Das heißt in diesem Punkt könnte Cantor die Aktual-Unendlichen Zahlen auch als Potentiell-Unendliche beschreiben. Der Unterschied besteht darin, dass man die transfiniten Zahlen zwar vergrößern kann, aber sie schon unendliche Größen sind. Cantor unterstreicht nochmals, dass er nicht der Ansicht ist, dass dem Transfiniten der Begriff Potentiell-Unendliches zugeschrieben werden darf, indem er sagt, dass das Potentiell-Unendliche nicht in sich bestimmt, fest und unveränderlich ist, sondern es ist ein „in Veränderung begriffenes Endliches“. Aktual-unendliche Zahlen sind jedoch in sich bestimmte Größen, denen nur eine bestimmte unendliche Größe zukommt.

Cantor, Brief an Schmid, S. 498

- Schmid: das Transfinitum sive infinitum actuale in natura creata ist unmöglich → nur Gott wäre Aktual-Unendlich
- Schmid vertrat die Position, dass das Transfinitum sive infinitum actuale in natura creata unmöglich ist. Demnach wäre das einzige, was infinitum actu sein könnte, Gott.

Cantor, Brief an Heman, S. 391ff

- Heman: Das Transfinite ist gleich dem Absoluten Sein Gottes.

Cantor, Brief an Jeiler, S. 408ff

- Jeiler: Das Transfinite ist eine Unterkategorie des Potentiell-Unendlichen.

Cantor, Brief an Carbonelle, S. 283ff

- Cantor nennt das Aktual-Unendliche im ewigen allmächtigen Gott oder in der erschaffenen Natur das Absolute.
- Cantor nennt das Aktual-Unendliche in abstracto und in concreto das Transfinitum.

Cantor, Briefe an Esser, S. 299f

- Cantor schreibt, dass er in einem Werk von Joseph Hontheim gelesen hat, dass es keinen Beweis für die Unmöglichkeit der Aktual-Unendlichen Zahlen gibt. Das hat ihn natürlich sehr gefreut. Weiters bemerkt er, dass es schon früher Lehren zum Aktual-Unendlichen gegeben hat. Diese waren allerdings sehr widersprüchlich zu seiner Lehre und deshalb wundert es ihn auch nicht, dass sie nicht weiterentwickelt und weiterverbreitet waren.

Cantor, Brief an Franzelin, S. 319ff

- Cantor schreibt, dass ein Beweis für die Unmöglichkeit des Aktual-Unendlichen vom Gottesbegriff ausgeht und er schließt aus der Vollkommenheit Gottes auf die Möglichkeit der Schöpfung eines Transfinitum ordinatum.

I.2) Begrenztheit als Kriterium des Transfiniten

Ausgearbeitet von: Alexander Oppitz, Eva Jelinek

Unterscheidung des Aktual Unendlichen nach 3 Beziehungen

- 1) *Absolutunendliches* bzw. *Absolutes*, realisiert in Deo, in der höchsten Vollkommenheit, im völlig unabhängigen, außerweltlichen Sein
- 2) Vertreten in der abhängigen, kreatürlichen Welt
- 3) Als mathematische Größe, Zahl oder Ordnungstyps vom Denken in abstracto

In 2 + 3 stellt sich das Aktual Unendliche als beschränktes dar. Es ist vermehrbar und insofern dem Endlichen verwandt. Dieses nennt Cantor *Transfinitum*.

Dieses *Transfinitum* steht im strengen Gegensatz zu dem *Absoluten*.

Für jeden der 3 Beziehungen besteht die Möglichkeit der Bejahung bzw. der Verneinung des Aktual Unendlichen. Daraus ergeben sich 8 verschiedene Standpunkte.

Überlegungen bezüglich des Transfiniten fallen in die Bereiche der Metaphysik und der Mathematik.

Transfinite Zahlen sind Ordnungszahlen unendlicher wohlgeordneter Mengen; obwohl es sich somit um unendliche Zahlen handelt, so sind sie dennoch beschränkt in dem Sinne, dass sie unendliche oft weiter vermehrbar sind (vgl. Briefe an Aloys Schmid). Als Beispiel: die kleinste transfinite Zahl ω ist beliebig oft "vermehrbar" indem man weiterzählt im Sinne von $\omega+1$, $\omega+2$, ... durch dieses Erzeugungsprinzip können immer neue Zahlen gebildet werden; und durch ein später eingeführtes Hemmungsprinzip können neue transfinite Zahlen gebildet werden, die Ordinalzahlen dieser neuen Menge sind, allerdings in einer um eins höheren Zahlenklasse als ω . (Cantor, „Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre“). Das Transfinitum ist somit konstant und größer als alles endliche und dabei noch unbeschränkt vermehrbar und somit begrenzt, weil es „in sich und im Verhältnis zu allem außerhalb Liegendem bestimmt ist“ (Tapp, *Kardinalität und Kardinäle*, S.506).

Vgl. auch Cantor, „Mitteilungen zur Lehre des Transfiniten“, S. 378ff

2 Vergleichs-Positionen zum Unendlichen/Unbegrenzten:

- 1) Aristoteles: „Denn nicht [das], außerhalb dessen nichts [ist], sondern [das, dem] immer etwas außerhalb ist, das ist das Unendliche.“¹ Dieses Unendliche ist ein Unbestimmtes (im Gegensatz zur transfiniten Zahl, die definiert und abgegrenzt und begrenzt ist); Aristoteles verwechselt das actual Unendliche mit dem potential Unendlichen; oder er setzt den Begriff der Unendlichkeit mit dem des Absoluten (= Gott) gleich. Für Cantor handelt es sich bei Aristoteles um einen mangelhaften

¹

Unendlichkeitsbegriff bzw. Aristoteles vermischt die von Cantor unterschiedenen Beziehungen des actual Unendlichen (siehe oben).

- 2) Joannes Damascenus: "Aoriston" = Unbegrenzt; „Das aber [ist] unbegrenzt, das jedes Maß und jede Zahl durch irgendein mehr übertrifft“ (vgl. Tapp, *Kardinalität und Kardinäle*, S. 506. Diese Auffassung des Unendlichen sieht Cantor in Bezug auf das Transfinite zutreffend (Bsp.: da ich immer noch $\omega+1$ sagen kann, ist der Charakter der "Unbegrenztheit" bereits nicht mehr gegeben).

I.3) Frühere und alternative Konzeptionen des Aktual-Unendlichen

Ausgearbeitet von: Manuel Tarini, Agnes Leyrer

I.3.1) Aristoteles, Physik-Schrift für die erste Definition in 1, III, c4 und c.6 (207a ff)

Aristoteles Physik: 1, III, c.4

Aristoteles fragt im 4. Kapitel der Physik (c.4), was es bedeutet unendlich oder endlich zu sein und führt 2 Positionen der früheren Philosophen an:

- a) Platon und die Pythagoreer, die das Unendliche als subsistent ansahen, also substanzhaft
- b) im Englischen dann die „physicist“ (Naturphilosophen), welche es als bloßes Attribut ansahen

und gelangt zu den unten angeführten Fragen:

„But the problem of the infinite is difficult: many contradictions result wether we suppose it to exist or not to exist. If it exists, we have still to ask how it exists; as a substance or as the essential attribute of some entity? Or in neither way, yet none the less is something which is infinite or some things, which are infinitely many?“ (203b; c.4)²

Aristoteles Physik: 1, III, c.6

206b – 207a

“Yet though he (Plato) makes the infinites two, he does not use them. For in the numbers of infinite in the direction of reduction is not present, as the monad is the smallest; nor is the infinite in the direction of increase, for the parts number only up to the decad.

The infinite turns out to be the contrary of what is said to be. It is not what has nothing outside it that is infinite, but what always has something outside it. This is indicated by the fact that rings also that have no bezel are described as “endless”, because it is always possible to take a part which is outside a given part.”

I.3.2) Aristoteles, De coelo: L.1 c.5

Es findet sich nicht wirklich die wörtliche Definition wie sie bei Tilmann Pesch verwendet werden soll, aber das gesamte 5. Kapitel des Werkes kreist um das Thema, dass es nichts Größeres als das Unendliche geben kann.

„5. Nachdem dies geklärt ist, muß man an die übrigen Fragen herantreten, und zwar als erste, ob es einen unendlichen Körper gibt, wie die meisten unter den alten Denkern

² Das Griechische Pendant dazu findet sich in 9441/4 FB Philosophie.

glaubten, oder ob dies ein Ding der Unmöglichkeit ist. Denn für die Betrachtung der Wahrheit kommt nicht wenig, sondern alles darauf an, ob diese oder jene Meinung bestehen kann, hier nämlich ist die Quelle aller Streitigkeiten zwischen denen, die über die Natur des Alls etwas gelehrt haben; sie war es und wird es wohl bleiben, wenn anders auch eine kleine Abweichung von der Wahrheit am Ende des Weges sich vervielfacht hat, z.B. wenn jemand eine untere Grenze der Größe lehrt: diese Einführung eines kleinsten Maßes rührt an die größten Dinge in der Mathematik. Das kommt daher, daß die Grundlage bedeutsamer durch ihre Auswirkung ist als durch ihren Umfang, weil die anfangs kleine Quelle am Ende zum mächtigen Strom wird. Und das Unendliche hat die Bedeutung einer Quelle, und zwar der bedeutsamsten im Bereich der Größe, so daß es nicht überraschend noch widersinnig ist, wenn die Annahme eines unendlichen Körpers so erstaunlich einschneidende Folgen hat. Daher müssen wir dieser Frage ganz auf den Grund gehen.

Jeder Körper muß also entweder zu den einfachen oder den zusammengesetzten gehören, so daß auch das Unendliche entweder einfach oder zusammengesetzt sein muß. Sicherlich aber muß eine Zusammensetzung begrenzt sein, wenn es die einfachen Körper sind, weil etwas aus mengen- und größenmäßig begrenzten Teilen Zusammengesetztes selber nach Menge und Größe begrenzt ist. Denn es ist so groß, wie die Summe seiner Bestandteile. Also bleibt nur zu untersuchen, ob einer von den einfachen Körpern an Größe unendlich sein kann, oder ob dies unmöglich ist. Dies wollen wir zuerst für den ersten unter den Körpern und dann für die übrigen klarstellen. Daß es also der Körper auf der Kreisbahn allseitig begrenzt sein muß, geht aus Folgendem hervor. Wäre nämlich der Kreisbahn-Körper unendlich, dann werden die Fahrstrahlen von der Mitte aus unendlich sein, und Unendliches hat auch einen unendlichen Abstand. Unter Abstand von Linien verstehe ich nämlich dasjenige, was kein mit den Linien verbundenes Größenstück außerhalb läßt; dies also muß unendlich sein, weil es bei begrenzten Linien immer endlich sein wird. Da man nun stets etwas Größeres herausgreifen kann, als das Gegebene ist, so daß also für den Abstand das Gleiche gilt, wie für Zahlen, die wir unendlich nennen, weil es keine größte gibt, so gibt es, wenn man also etwas Unendliches nicht durchlaufen kann und andererseits an einem Unendlichen der Abstand unendlich sein muß, für Unendliches keine Kreisbewegung. Denn Himmel sehen wir aber im Kreise sich drehen, und wir haben Gründe angegeben, warum es ein Körper sein muß, der sich im Kreise dreht.[...] Soviel jedoch ist klar, daß man unmöglich an einer unbegrenzten Linie in begrenzter Zeit vorbeikommen kann, folglich nur in unbegrenzter Zeit. [...] Ferner: wie eine abgegrenzte Strecke nicht unendlich sein kann – sie könnte es ja nur der Länge nach sein! –, so kann es ebensowenig eine Fläche sein, sofern sie begrenzt ist. Sowie sie vielmehr eine Grenze bekommt, kann sie es nicht mehr sein, es gibt z.B. nicht ein unendliches Quadrat oder einen unendlichen Kreis oder eine unendliche Kugel, so wenig wie eine unendliche Elle. Wenn also weder Kugel noch Kreis noch Quadrat unendlich sein können und ohne Kreis auch keine Kreisbewegung möglich ist, ohne unendlichen keine unendliche, dann kann ein unendlicher Körper keine Kreisbewegung ausführen.“

I.3.3) Tilmann Pesch: *Institutiones philosophiae naturalis secundum Principia S. Thomae*

Nicht ausfindig zu machen.

Kurze Übersicht und "Chronologie" zu den Texten I.3.4 – I.3.6:

- 1727 FONTENELLE: Versuch zur Einführung aktual unendlicher Zahlen.
- 1806f. GERDIL (u.a.) deckt Widersprüche bei Fontenelle auf; eigene Annahme der Unmöglichkeit aktual unendlicher Zahlen (in concreto und in abstracto) für Beweis für zeitlichen Weltanfang (= gegen Ewigkeit der Welt).
- 1870er -1880er CARBONNELLE: Bejahung des Aktual Unendlichen in abstracto und in Deo (zumindest nach Cantors Sichtweise); Annahme der Unbestimmtheit der unendlichen Zahl für Beweis für zeitlichen Weltanfang.
- 1880er CANTOR kritisiert unzulässige Voraussetzung der Unmöglichkeit aktual unendlicher Zahlen für vermeintliche Beweise für zeitlichen Weltanfang.

I.3.4) Bernard le Bovier de FONTENELLE: *Éléments de la Géométrie de l'infini* S.16f.³

"Wir haben natürlich eine bestimmte Idee des Unendlichen [idée de l'Infini], als eine Größe [grandeur] ohne Grenzen [sans bornes] in jedem Sinn, die alles enthält [comprend tout], außerhalb derer nichts ist. Man kann dieses Unendlich Metaphysisch nennen, aber das Geometrische Unendlich, das bedeutet also jenes das die Geometrie betrachtet [...] ist stark anders, das ist nur eine Größe größer als jede endliche Größe [une grandeur plus grande que toute grandeur finie], aber nicht größer als jede Größe [non pas plus grande que toute grandeur]. Es ist sichtbar dass diese Definition erlaubt dass es Unendliche kleiner oder größer als andere Unendliche gebe, und dass die Definition des metaphysischen Unendlichen das nicht erlauben würde [...]"

Ich könnte zusätzlich auch sagen dass das metaphysische Unendlich sich nicht anwenden lässt auf Zahlen [nombres] oder räumliche Ausdehnung [l'étenduë], es entwickelt sich zu einem reinen Sein des Verstandes / der Vernunft / Urteilskraft [un pur Etre de raison]."

CANTOR Brief an Aloys Schmid S. 50off.:

"Dagegen ist, wie ich [...] aus den beiden Abhandlungen des Kardinal Gerdil [...] ersah, in der ersten Hälfte des vorigen Jahrhunderts ein merkwürdiger Versuch von dem berühmten Franzosen Fontenelle gemacht worden (in dem Buche "Éléments de la Géométrie de l'infini", Paris, 1727), actual unendliche Zahlen einzuführen; dieser Versuch ist jedoch gescheitert [...] Fontenelle's Versuch musste scheitern, weil seine unendlichen Zahlen einen flagranten inneren Widerspruch mit sich auf die Welt brachten; es war leicht, diesen Widerspruch aufzudecken und ist dies von dem R. P. Gerdil bestens geschehen. [...] Fontenelle in der bescheidensten Weise sich als Laie in der Mathematik bekennt."

Jonas COHN Geschichte des Unendlichkeitsproblems im abendländischen Denken bis Kant S. 225:

"In Frankreich suchte Fontenelle die Annahme aktueller Unendlichkeiten in der Geometrie zu verteidigen. Sein Buch zeigt einen merkwürdigen Mangel an Verständnis für die Unterscheidung von unendlicher Reihe und abgeschlossener Unendlichkeit, die doch Locke,

³ Erhältlich an der UB Wien, jedoch 600 Seiten stark und französisch, daher nicht zur Gänze bearbeitet. Übersetzung von Leyrer mit Originalausdrücken in Klammern.

Leibniz und Newton so klar durchgeführt hatten. In der Vorrede unterscheidet er das metaphysisch Unendliche, eine in jedem Sinne unendliche Größe, die alles umfasst, außerhalb deren es nichts giebt [!], vom geometrisch Unendlichen, als einer Größe, die zwar größer als jede endliche Größe ist, nicht aber größer als jede Größe überhaupt. Diese Unterscheidung wird eingeführt, um die verschiedenen Ordnungen des Unendlichen zu rechtfertigen. Die Art, wie er die unendliche Größe einführt, bezeichnet am besten seine Begriffsverwirrung. Da die Größe der Vermehrung ohne Grenze fähig sei, könne man sie als unendlich vermehrt begreifen oder auffassen; sie würde dann unendlich geworden sein. Es sei ja auch in der That [!] unmöglich, dass eine Größe, die der Vermehrung ohne Grenze fähig sei, sich eben so verhalte (soit dans le même cas), als wenn sie derselben nicht ohne Grenze fähig wäre. Wäre sie deren nun aber nicht fähig, so müsste sie immer begrenzt bleiben; da sie also der Vermehrung ohne Grenze fähig sei, so könne sie nicht immer begrenzt bleiben, oder, was dasselbe ist, müsse unendlich werden. Dieser »Beweis« schließt also aus der Verschiedenheit endlicher und unendlicher Reihen auf einen Gegensatz in allen Punkten. Der Gegensatz beider besteht aber in Wahrheit darin, dass die endliche Reihe ein letztes Glied besitzt, die unendliche nicht, nicht im Vorhandensein oder Fehlen wirklich unendlicher Glieder.“

I.3.5) Kardinal Hyacinthe Sigismond (Giacinto Sigismondo)⁴ GERDIL: *Opere edite ed inedite*⁵.

Darin vor allem folgende Texte (die u.a. von Carbonnelle und von Cantor genannt werden):

- *Essai d'une démonstration mathématique contre l'existence éternelle de la matière et du mouvement, déduite de l'impossibilité démontrée d'une suite actuellement infinie de termes, soit permanents, soit successifs.* = "Aufsatz eines mathematischen Beweises gegen die ewige Existenz der Materie und der Bewegung, abgeleitet aus der bewiesenen Unmöglichkeit einer aktual unendlichen Folge von Gliedern, seien sie permanent (andauernd), seien sie sukzessive (aufeinanderfolgend)"⁶.
- *Memoire de l'infini absolu considéré dans la grandeur.* = „Abhandlung des absoluten (uneingeschränkten, reinen) Unendlichen in der Größe betrachtet“⁷.

CANTOR "Über die verschiedenen Standpunkte in bezug auf das aktual Unendliche" S. 37off.

"Ich stehe durchaus nicht in prinzipiellem Gegensatz zu diesen Autoren [Erg. Leyrer: Moigno, Cauchy, Gerdil], sofern sie eine Harmonie zwischen Glauben und Wissen erstreben, halte aber das Mittel, dessen sie sich hier dazu bedienen, für ein gänzlich verfehltes.

Wenn die Glaubenssätze zu ihrer Stütze eines so *grundfalschen* Satzes, wie derjenige von der Unmöglichkeit aktual unendlicher Zahlen (der in der bekannten Formulierung "numerus infinitus repugnat" uralt ist [...]) bedürften [...]

⁴ Es finden sich die unterschiedlichsten Schreibweisen des Namens in der Literatur.

⁵ In Österreich nicht entlehnbar, per Fernleihe aus dem Ausland auch schwer / nicht wegen des Alters. Seit Jänner 2010 sind die Texte scheinbar nun doch – zumindest teilweise – digitalisiert verfügbar laut Benachrichtigung der Fernleihe der UB Wien vom 18.1.2010, und zwar am „Multimedia Server“ des „Bibliotheksverbundes Bayern“ bzw. der Staatsbibliothek Bamberg, siehe Literaturverzeichnis. Diese Texte konnte ich jedoch nicht mehr zeitgerecht einarbeiten.

⁶ Übersetzung von Leyrer.

⁷ Übersetzung von Leyrer.

Alle sogenannten Beweise wider die Möglichkeit aktual unendlicher Zahlen sind, wie in jedem Falle besonders gezeigt und auch aus allgemeinen Gründen geschlossen werden kann, der Hauptsache nach dadurch fehlerhaft, und darin liegt ihr $\pi\rho\omega\tau\omicron\upsilon\ \psi\epsilon\upsilon\delta\omicron\varsigma$, daß sie von vornherein den in Frage stehenden Zahlen alle Eigenschaften der endlichen Zahlen zumuten oder vielmehr aufdrängen, während die unendlichen Zahlen doch andererseits, wenn sie überhaupt in irgendeiner Form denkbar sein sollen, durch ihren Gegensatz zu den endlichen Zahlen ein ganz neues Zahlengeschlecht konstituieren müssen, dessen Beschaffenheit von der Natur der Dinge durchaus abhängig und Gegenstand der Forschung, nicht aber unserer Willkür oder unserer Vorurteile ist. [...]

Man kann *erstens* das A.-U. sowohl *in concreto*, wie auch *in abstracto* verwerfen, wie dies z.B. von Gerdil, Cauchy, Moigno [...] und von allen sogenannten *Positivisten* und deren Verwandten geschieht.

TAPP, *Kardinalität und Kardinäle* S. 112:

"[...] einen von Kardinal Gerdil vorgelegten Beweisversuch für den zeitlichen Weltanfang [...] Der Gerdilsche Beweis operiert mit der Annahme, dass aktual unendliche Zahlen unmöglich seien."

CANTOR Brief an Aloys Schmid S. 50ff.

"Gerdil ist von d'Alembert in seiner Ansicht über das A. U. bestätigt worden [Erg. Leyrer. Annahme der Unmöglichkeit des Transfiniten bzw. des aktual Unendlichen]; wenn man die Autorität d'Alembert's in der Mathematik berücksichtigt, erscheint der Fehler Gerdils sehr verzeihlich.

Was aber die bei dieser Gelegenheit von Gerdil und Cauchy [...] vertretene *Sache* anbetrifft, so bin ich in Bezug auf die Welterschöpfung und ihren zeitlichen Anfang ganz mit Ew. Hochwürden einverstanden, halte es aber auch mit Thomas Aq., der in seinem *Opusculum de aeternitate mundi* die mathematische Beweisbarkeit dieses Satzes (dass nämlich ein zeitlicher Weltanfang anzunehmen ist) bestreitet, indem er den damaligen "Murmurantes" die Worte zuruft, welche noch heute [...] ihre unvergängliche Wahrheitskraft behaupten: *praeterea adhuc non est demonstratum, quod Deus non possit facere ut sint infinita* actu*" [Übersetzung Tapp in der Fußnote: "Und außerdem ist bis jetzt noch nicht bewiesen, dass Gott nicht machen könnte, dass es aktual Unendliches gibt"]

* Man achte auf den bedeutsamen Plural der im vorliegenden Zusammenhang vollends das hier gemeinte Unendliche als "transfinitum" charakterisiert."

1.3.69 Ignace CARBONNELLE SJ: *Les confins de la science et de la Philosophie*

Hinweis auf weitere von Cantor genannte Texte von Carbonnelle⁸:

- *Calcul de la chaleur diurne envoyée par la soleil*, in: *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles* 1, 1876, S. 323-366.
- *Les incertitudes de la géométrie*, in: *Revue des questions scientifiques* 14, 1883.
- *Les nombres et la philosophie*, in: *RevQuestSc.* 17, 1885.

⁸ Diese Texte waren nicht auffindbar.

CARBONNELLE Les Confins de la science et de la philosophie⁹:

4. Kapitel: Das Unendliche in der Zeit und im Raum. Die Schöpfung (L'infini dans le temps et dans l'espace. La création):

Versuch eines wissenschaftlichen Beweises (démonstration scientifique), klar und rigoros (claire et rigoureuse) des Satzes dass die materielle Welt einen Anfang gehabt hat (proposition que le monde matériel a eu un commencement), und zwar in der Zeit (dans le temps), und dass sie vollständig begrenzt ist im Raum (complètement limité dans l'espace) (S. 227)

Voraussetzung, die Carbonnelle macht: die Verteidigung des Dogmas der Erschaffung / Schöpfung (dogme de la création) (S. 233)

Kritik Carbonnelles an zwei früheren Formeln: dass die unendliche Zahl eine Absurdität sei (que le nombre infini est une absurdité) (S. 233ff.) und an der Unterscheidung von aktual-unendlich (l'infini actuel / l'infini en acte) und potenzial-unendlich (l'infini en puissance) (S. 237ff.)

Carbonnelles fundamentale Formel (formule fondamentale): "Die unendliche Zahl ist nicht absurd, aber wesentlich unbestimmt" (le nombre infini n'est pas absurde, mais il est essentiellement indéterminé.) (S. 250) Was absurd ist, ist die unendliche und zugleich bestimmte Zahl (le nombre à la fois infini et déterminé) (S. 281).

Ab S. 257 schreibt Carbonnelle bei der Erklärung der Unbestimmtheit auch von "nombres infinis" im Plural, zuvor meines Erachtens nach nur im Singular. Er kommentiert dies m.E. aber nicht dezidiert oder bewusst.

Carbonnelle schlägt eine andere Unterscheidung vor anstelle jener von aktual-unendlich und potenziell-unendlich: nämlich die unendliche bestimmte Zahl, die eine Absurdität ist, und die unendliche unbestimmte Zahl (die demnach nicht absurd ist). (S. 263ff.)

Genannte Anwendungen: die Zahl der Sterne sowie der existierenden Atome sei endlich (S. 267).

CANTOR Brief an Carbonnelle S. 283f.:

"Namentlich geht aus dem ersten Werke [Erg. Leyrer: "Les confins..."] eine Uebereinstimmung [!] zwischen Ihren und meinen Ansichten in vielen und sogar den wichtigsten Beziehungen hervor und ich freue mich besonders, dass Sie darin mit ebensoviel Energie wie Scharfsinn für das Actualunendliche in abstracto, d.h. für die actual unendlichen Zahlen eintreten, obgleich unsere Differenz darin besteht, dass ich auch das A. U. in concreto, sive in natura naturata mit derselben Entschiedenheit vertheidige [!].

Was die *dritte* auf das A. U. bezügliche Frage, nämlich nach dem A. U. in Deo aeterno omnipotenti seu in natura naturante [Übersetzung Tapp in Fußnote: "Das Actualunendliche im ewigen allmächtigen Gott oder in der erschaffenden Natur"] betrifft [...] so zweifle ich nicht, dass wir hier wieder hinsichtlich der Bejahung ganz einer Ansicht sind. Das letztere A.U., d.h. das A.U. In Deo, nenne ich, wie Sie in meinem Schriftchen "Grundlagen" bemerkt haben werden, das Absolute und es fällt dasselbe ganz außerhalb der Zahlentheorie.

Dagegen sind das A. U. in abstracto und in concreto, wo ich es Transfinitum nenne, nicht nur Gegenstand einer erweiterten Zahlentheorie, sondern auch, wie ich noch zu zeigen hoffe, einer avancierten Naturwissenschaft und Physik.

⁹ Übersetzung und Paraphrasierung des folgenden Abschnittes von Leyrer.

Was nun den von Ihnen vertretenen Satz: "Le nombre *infini* n'est pas absurde, mai il est essentiellement indéterminé" [Erg. Leyrer: "Die *unendliche* Zahl ist nicht absurd, aber sie ist wesentlich unbestimmt"]

betrifft, so unterschreibe ich die erste darin enthaltene Behauptung, kann aber den *ganzen* Satz nur in demselben Sinne zugeben, in welchem ich auch den Satz: "Le nombre *fini* n'est pas absurde, mais il est essentiellement indéterminé" [Erg. Leyrer: "Die *endliche* Zahl ist nicht absurd, aber sie ist wesentlich unbestimmt"] vertheidigen [!] könnte.

Da es nämlich unendlich viele *endliche bestimmte* Zahlen giebt [!], so ist, wenn man von *der* endlichen Zahl schlechthin spricht, dieser Begriff ein wesentlich unbestimmter.

Da aber auch, und zwar eine noch größere *Mächtigkeit* von *bestimmten act. unendlichen* Zahlen oder, wie ich sie nenne, von *transfiniten* Zahlen existirt [!] (wie ich dies bewiesen habe), so ist auch, wenn man von *der* unendlichen Zahl schlechthin spricht, dieser Begriff ein wesentlich unbestimmter."

CANTOR Brief an Aloys Schmid S. 502:

"Der R. P. Ign. Carbonnelle hat in seiner schönen Schrift "Les confins de la science et de la philosophie", 3e ed. t. I. Cap. 4 den Versuch gemacht, den Gerdilschen Beweis für den zeitlichen Weltanfang dadurch zu retten, dass er zwar sehr scharfsinnig und kenntnisreich den Satz vertheidigt [!]: "Le nombre actuellement infini n'est pas absurde", aber demselben den harten, unbarmherzigen und dissonirenden [!] Nachsatz giebt: "mais il est essentiellement indéterminé" [Erg. Leyrer: Übersetzung Tapp in der Fußnote: "Die aktual unendliche Zahl ist nicht absurd... aber sie ist wesentlich unbestimmt"]. Auf diesen Nachsatz würde er vielleicht verzichtet haben, wenn er schon damals meine Arbeiten gekannt hätte, die sich von Anfang an, seit bald zwanzig Jahren, fast ausschließlich mit dem Beweis der Individuations-, Specifications- [!] und Ordinationsmöglichkeit des actualen Unendlichen in natura creata beschäftigen. Mit jenem Nachsatz steht und fällt aber der vom R. P. Carbonnelle unternommene mathematische Beweis für den zeitlichen Anfang der Schöpfung."

TAPP, Kardinalität und Kardinäle:

"Für Cantor war angesichts seiner Theorie, bestimmter, voneinander verschiedener und in einer festen Ordnung stehender unendlicher Zahlen, die Carbonnellesche Voraussetzung [Ergänzung Leyrer: der wesentlichen Unbestimmtheit aktual unendlicher Zahlen] nicht zu halten, und mit ihr auch der ganze Beweis für den zeitlichen Weltanfang nicht." (S. 112 f.)

"Cantor hat allerdings auch einen Kritikpunkt an Carbonnelles Auffassung von diesen unendlich großen Zahlen. Carbonnelle lehre nämlich "Le nombre *infini* n'est pas absurde, mai il est essentiellement indéterminé" [...]

Dies könnte man nun entsprechend der Auffassung Thomas von Aquins verstehen. Dieser lehrte [...] die Unbestimmbarkeit eines unendlichen Quantums durch Einheiten und deshalb allerdings auch die Unmöglichkeit aktual unendlicher Zahlen. Damit würde allerdings Carbonnelles Position derselben Kritik wie die Position Thomas' verfallen und mit der Etablierung einer präzisen mathematischen Lehre von bestimmten unendlichen Zahlen vollends hinfällig werden. Cantor jedoch interpretierte Carbonnelles Äußerung (wenn man so will, ganz dem modernen *principle of charity gemäß*) so, dass er Carbonnelle *soweit wie möglich recht gab*, und das hieß: Er bezog die Unbestimmtheit nicht auf eine Eigenschaft, die allen unendlichen Zahlen zukommen müsste, sondern auf die Rede von "*der* unendlichen Zahl", ohne dass eine konkrete Zahl benannt wäre. Dann hat die Behauptung der Unbestimmtheit natürlich nichts mehr mit der Unendlichkeit der betreffenden Zahl zu tun, und Cantor kann schließlich sagen, er halte den Satz Carbonnelles höchstens in demselben

Sinne für wahr, wie den entsprechenden Satz: "Le nombre *fini* n'est pas absurde, mais il est essentiellement indéterminé." [...]

Es spricht allerdings einiges dafür, dass Carbonnelle die Unbestimmtheit nicht im Sinne der Cantorsche Interpretation, sondern in etwa im Sinne des Thomasschen Gedankenganges aufgefasst hat." (S. 96f.)

II) Mathematische Fragestellungen

II.1) Mengenlehre

Ausgearbeitet von: Gabriele Schneider, Naomi Osorio-Kupferblum

Bevor Cantor den Mengenbegriff benutzte, sprach er von **Wertereihe**¹⁰ (z.B. ... $x-1$, x_0 , $x+1$...), später von **Wertemenge** (eine gegebene endliche oder unendliche Anzahl von Zahlengrößen) und **Punktmenge** (eine gegebene endliche oder unendliche Anzahl von Punkten auf einer Geraden).¹¹ Hier wird zum 1. Mal die Menge selbst als Gegenstand der Betrachtung angesehen.¹²

In seiner Korrespondenz mit Dedekind und sowie in einem Aufsatz aus dem Jahr 1874¹³ spricht Cantor von **Inbegriffen** (z.B. aller positiven ganzzahligen Individuen, oder aller positiven reellen Zahlengrößen).

Schließlich unterschied Cantor das mathematisch Unendliche in ein Uneigentlich-Unendliches und ein eigentlich-Unendliches.¹⁴ Ersteres ist eine Größe, die stets endlich bleibt, aber entweder über alle Grenzen hinauswächst oder bis zu beliebiger Kleinheit abnimmt.

Menge: Zusammenfassung M von bestimmten wohl unterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.¹⁵

Abzählbare Mengen:

S. 4) [hier III 1, S. 115; III 2, S. 119; III 4, S.142]; d. h. man kann eine solche Menge, *unerachtet* und trotz ihres *Überalldichtseins* in jedem Intervalle,

Mächtigkeit oder Kardinalzahl: von M nennen wir den Allgemeinbegriff, welcher mit Hilfe unseres aktiven Denkvermögens dadurch aus der Menge M hervorgeht, dass von der Beschaffenheit ihrer verschiedenen Elemente m und von der Ordnung ihres Gegebenseins abstrahiert wird.¹⁶

Die „Mächtigkeiten“ repräsentieren die einzige und notwendige Verallgemeinerung der endlichen „Kardinalzahlen“, sie sind nichts anderes als die aktual-unendlich-großen Kardinalzahlen, und es kommt ihnen dieselbe Realität und Bestimmtheit zu wie jenen; nur daß die gesetzmäßigen Beziehungen unter ihnen, die auf sie bezügliche „Zahlentheorie“ zum Teil eine andersartige ist als im Gebiete des Endlichen.

Gleiche Mächtigkeit:

¹⁰ Cantor 1871 „Notiz...“

¹¹ Cantor 1872 „Über die Ausdehnung...“

¹² Tapp, *Kardinalität und Kardinäle*, S. 100

¹³ Cantor 1874 „Über eine Eigenschaft des Inbegriffes...“

¹⁴ Cantor 1883 Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre

¹⁵ Cantor 1895 „Beiträge...“

¹⁶ Cantor 1932 S.282

Wenn zwei wohldefinierte Mannigfaltigkeiten M und N sich eindeutig und vollständig, Element für Element, einander zuordnen lassen (was, wenn es auf eine Art möglich ist, immer auch noch auf viele andere Weisen geschehen kann), so möge für das Folgende die Ausdrucksweise gestattet sein, daß diese Mannigfaltigkeiten *gleiche Mächtigkeit* haben, oder auch, daß sie *äquivalent* sind. Unter einem *Bestandteil* einer Mannigfaltigkeit M verstehen

¹⁷

„Ist M eine Mannigfaltigkeit von der Mächtigkeit der positiven, ganzen Zahlenreihe, so hat auch jeder unendliche Bestandteil von M gleiche Mächtigkeit mit M .“

„Ist M', M'', M''', \dots eine endliche oder einfach unendliche Reihe von Mannigfaltigkeiten, von denen jede die Mächtigkeit der positiven, ganzen Zahlenreihe besitzt, so hat auch die Mannigfaltigkeit M , welche aus der Zusammenfassung von M', M'', M''', \dots entsteht, dieselbe Mächtigkeit.“

¹⁸

Zwei Mengen M und N nennen wir „**äquivalent**“ und bezeichnen dies mit $M \sim N$ oder $N \sim M$, wenn es möglich ist, dieselben gesetzmäßig in eine derartige Beziehung zueinander zu setzen, dass jedem Element der einen von ihnen ein und nur ein Element der anderen entspricht.¹⁹

Die Äquivalenz von Mengen bildet also das notwendige und untrügliche Kriterium für die Gleichheit ihrer Kardinalzahlen.²⁰

Eine Menge M nennen wir „**einfach geordnet**“, wenn unter ihren Elementen m eine bestimmte „**Rangordnung**“ herrscht, in welcher von je zwei beliebigen Elementen m_1 und m_2 das eine den „niedrigeren“, das andere den „höheren“ Rang einnimmt, und zwar so, dass wenn von drei Elementen m_1, m_2 und m_3 etwa m_1 dem Range nach niedriger als m_2 , dieses niedriger als m_3 , alsdann auch immer m_1 niedrigeren Rang hat als m_3 .²¹

„**Wohlgeordnet**“ nennen wir eine einfach geordnete Menge F , wenn ihre Elemente f von einem niedrigsten f_1 an in bestimmter Sukzession aufsteigend, so dass folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

I. Es gibt in F ein dem Range nach niedrigstes Element f_1 .

II. Ist F' irgendeine Teilmenge von F und besitzt F' ein oder mehrere Elemente höheren Ranges als alle Elemente von F' , so existiert ein Element f' von F , welches auf die Gesamtheit F' zunächst folgt, so dass keine Elemente in F' vorkommen, die ihrem Range nach zwischen F' und f' fallen.²²

¹⁷ Cantor 1932 S.119

¹⁸ Cantor 1932 S.120

¹⁹ Cantor 1932 S.283

²⁰ Cantor 1932 S.283

²¹ Cantor 1932 S.296

²² Cantor 1932 S.312

Jede Teilmenge einer wohlgeordneten Menge hat ein niedrigstes Element.²³

Teilmenge:

äquivalent sind. Unter einem *Bestandteil* einer Mannigfaltigkeit M verstehen wir jede andere Mannigfaltigkeit M' , deren Elemente zugleich Elemente von M sind. Sind die beiden Mannigfaltigkeiten M und N nicht von gleicher Mächtigkeit, so wird entweder M mit einem Bestandteile von N oder es wird N mit einem Bestandteile von M gleiche Mächtigkeit haben; im ersteren Falle nennen wir die Mächtigkeit von M *kleiner*, im zweiten Falle nennen wir sie *größer* als die Mächtigkeit von N .

²⁴

Mächtigkeit von Teilmengen:

die gleiche ist. Ein Bestandteil einer endlichen Mannigfaltigkeit hat immer eine kleinere Mächtigkeit als die Mannigfaltigkeit selbst; dieses Verhältnis hört gänzlich auf bei den *unendlichen*, d. i. aus einer unendlichen Anzahl von Elementen bestehenden Mannigfaltigkeiten. Aus dem Umstande allein, daß eine unendliche Mannigfaltigkeit M ein Bestandteil einer andern N ist oder einem solchen eindeutig und vollständig zugeordnet werden kann, darf keineswegs geschlossen werden, daß ihre Mächtigkeit kleiner ist als die von N ; dieser Schluß ist nur dann berechtigt, wenn man weiß, daß die Mächtigkeit von M nicht gleich ist derjenigen von N ; ebensowenig darf der Umstand, daß N ein Bestandteil von M ist oder einem solchen eindeutig und vollständig zugeordnet werden kann, als ausreichend dafür betrachtet werden, daß die Mächtigkeit von M größer sei als die von N .

²⁵

Unterscheidung in endliche Kardinalzahlen (bei endlichen Mengen) und transfiniten Kardinalzahlen (bei transfiniten Mengen).²⁶

Endliche Kardinalzahlen: Einem einzelnen Ding e_0 , wenn wir es unter den Begriff einer Menge $E_0=(e_0)$ subsumiert, entspricht als Kardinalzahl das, was wir als „Eins“ nennen und mit 1 bezeichnen; wir haben $1=E_0$.

Man vereinige nun mit E_0 ein anderes Ding e_1 , die Vereinigungsmenge heiße E_1 , so dass $E_1=(E_0, e_1)=(e_0, e_1)$ - Die Kardinalzahl von E_1 heißt „Zwei“ und wird mit 2 bezeichnet: $2=E_1$

Durch Hinzufügen neuer Elemente erhalten wir die Reihe der Mengen $E_2=(E_1, e_2)$, $E_3=(E_2, e_3), \dots$, welche in unbegrenzter Folge uns sukzessive die übrigen mit 3, 4, 5, ... bezeichneten, so genannten endlichen Kardinalzahlen liefern.²⁷

²³ Cantor 1897 S.208

²⁴ Cantor 1932 S.1192

²⁵ Cantor 1932 S.119

²⁶ nach Cantor 1932 S.292

²⁷ Cantor 1932 S.290

Die Mengen mit endlicher Kardinalzahl heißen, „endliche Mengen“, alle anderen „transfinite Mengen“. ²⁸

Menge der Kardinalzahlen ist geordnet.

Wohlgeordnete Folge von Mächtigkeiten „Alefs“ $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \dots$ ²⁹

\aleph_0 Mächtigkeit der „abzählbaren“ Mengen, \aleph_1 nächst größere usw. Menge aller Kardinalzahlen; dem arithmetischen Linearkontinuum (Gesamtheit aller reellen Zahlen) hat ein bestimmtes \aleph ³⁰

\aleph_0 : Die kleinste Mächtigkeit, welche überhaupt an unendlichen, d.h. aus unendlich vielen Elementen bestehenden Mengen auftreten kann, ist die Mächtigkeit der positiven ganzen rationalen Zahlenreihe; Die Mannigfaltigkeit dieser Klasse wurde ins unendlich abzählbare Mengen oder abzählbare Mengen genannt; sie ist dadurch charakterisiert, dass sie sich (auf viele Weisen) in der Form einer einfachen unendlichen, gesetzmäßigen Reihe

$E_1, E_2, \dots, E_v, \dots$

darstellen lassen, so dass jedes Element der Menge an einer bestimmten Stelle dieser Reihe steht.

Die Kardinalzahl ist der Allgemeinbegriff der einer Menge M und allen ihren äquivalenten Mengen zukommt.

Eine Vielheit heißt wohlgeordnet, wenn sie die Bedingung erfüllt, dass jede Teilvielheit ein erstes Element hat. ³¹ → Bezeichnung **Folge**

Axiom der Arithmetik: Die Tatsache der „Konsistenz“ endlicher Vielheiten ist eine einfache, unbeweisbare Wahrheit. ³²

²⁸ nach Cantor 1932 S.292

²⁹ Cantor 1932 S.443

³⁰ Cantor 1932 S.443

³¹ Cantor 1932 S.444

³² Cantor 1932 S.447

II.2) unendlich große Zahlen

Ausgearbeitet von: Julia Braunsteiner-Berger

Diagonalverfahren – die Entdeckung der Überabzählbarkeit:

Cantor selbst spricht davon ([W] S.278)³³, dass er in dem Aufsatz *Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen* (1874) zum ersten Mal den Nachweis erbracht habe, dass es unendliche Mengen gibt, die nicht gleichmächtig zur Reihe der natürlichen Zahlen (=abzählbar unendlich) sind.

In *Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre* (1890) bringt er jedoch einen „viel einfacheren Beweis“, der später als *Diagonalverfahren* bekannt wurde (der Begriff findet sich bei Cantor nicht). (Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, S. 278f.)

Cantor betrachtet einen Inbegriff M (eine Menge) von Elementen

$$E = (x_1, x_2, \dots, x_v, \dots),$$

wobei $x_1, x_2, \dots, x_v, \dots$ unendlich viele Koordinaten bezeichnen, die zwei unterschiedliche Formen (m und w) annehmen können, und behauptet:

„Ist $E_1, E_2, \dots, E_v, \dots$ irgendeine einfach unendliche Reihe von Elementen der Mannigfaltigkeit M , so gibt es stets eine Element E_0 von M , welches mit keinem E_v übereinstimmt.“

Der Beweis: Man denke sich eine Liste von Elementen

$$E_1 = (a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,v}, \dots),$$

$$E_2 = (a_{2,1}, a_{2,2}, \dots, a_{2,v}, \dots),$$

.....

$$E_\mu = (a_{\mu,1}, a_{\mu,2}, \dots, a_{\mu,v}, \dots),$$

.....

wobei die $a_{\mu,v}$ „in bestimmter Weise m oder w “ sind.

Man definiert nun eine Liste $b_1, b_2, \dots, b_v, \dots$, wobei b_v ebenfalls die Werte m und w annimmt, aber jeweils von $a_{v,v}$ verschieden ist, d.h. für jedes $a_{v,v} = m$ ist $b_v = w$ und umgekehrt.

Dadurch lässt sich ein Element

$$E_0 = (b_1, b_2, b_3, \dots)$$

von M konstruieren, das kein Teil der obigen Liste sein kann, denn dann wäre irgendein $b_v = a_{\mu,v}$, d.h. $b_\mu = a_{\mu,\mu}$, was aber durch die Definition von b_v ausgeschlossen ist.

Daraus folgt, dass die Gesamtheit aller Elemente von M sich nicht in der Reihenform $E_1, E_2, \dots, E_v, \dots$ anschreiben lässt, denn dann wäre irgendein E_0 sowohl Element als auch nicht Element von M .

Betrachtet man die Reihe $x_1, x_2, \dots, x_v, \dots$ als Dezimalstellen reeller Zahlen des Intervalls $[0,1]$, dann ist bewiesen: Das Intervall $[0,1]$ – und damit auch die Gesamtheit aller reellen Zahlen – ist überabzählbar, besitzt also eine höhere Mächtigkeit als die der natürlichen Zahlen.

(Kommentar: Cantor verwendet hier ein Binärsystem – bestehend aus den Werten m und w –, der Beweis lässt sich aber auch innerhalb eines Dezimalsystems durchführen, solange sichergestellt wird, dass jedes b_v von $a_{v,v}$ verschieden ist.)

³³ Seitenangaben beziehen sich im Folgenden auf die *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*

Aus der Verallgemeinerung dieses Prinzips folgt:

„...daß die Mächtigkeiten wohldefinierter Mannigfaltigkeiten kein Maximum haben oder, was dasselbe ist, daß jeder gegebenen Mannigfaltigkeit L eine andere M an die Seite gestellt werden kann, welche von stärkerer Mächtigkeit ist als L.“ (Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, S.279)

In einem Brief an Dedekind (1899) schreibt Cantor über den von ihm gebrachten Beweis:

„Die Bedeutung dieser Methode läßt sich einfach durch die Formel
 $2^\alpha > \alpha$
aussprechen.“ ([W] S.448)³⁴

Das ist der sogenannte *Teilmengensatz*: Für jede Menge ist die Menge ihrer Teilmengen von höherer Mächtigkeit als die Menge selbst. – Man hat dadurch ein Verfahren gewonnen, wodurch sich zu jeder Menge eine Menge von höherer Mächtigkeit bilden lässt.

Transfinite Kardinalzahlen, transfinite Ordnungszahlen:

In *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre* (1878) hält Cantor fest:

„Wenn zwei wohldefinierte Mannigfaltigkeiten M und N sich eindeutig und vollständig, Element für Element, einander zuordnen lassen (...), so möge für das Folgende die Ausdrucksweise gestattet sein, daß diese Mannigfaltigkeiten *gleiche Mächtigkeit* haben, oder auch, daß sie *äquivalent* sind.“ (Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, S.119)

Der Begriff der *Gleichmächtigkeit* oder *Äquivalenz* von Mengen ergibt sich also durch ein Zuordnungsgesetz; der Begriff der Kardinalzahl kommt hier noch nicht vor (auch nicht der der Ordinalzahl).

In späteren Schriften finden sich für diese beiden zentralen Begriffe je zwei Arten der Definition:

Kardinalzahl:

1) „ ‚Mächtigkeit‘ oder ‚Kardinalzahl‘ von M nennen wir den Allgemeinbegriff, welcher mit Hilfe unseres aktiven Denkvermögens dadurch aus der Menge M hervorgeht, daß von der Beschaffenheit ihrer verschiedenen Elemente m und von der Ordnung ihres Gegebenseins abstrahiert wird.“ (in: *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* 1895, zitiert nach: Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, S.282; vgl. auch *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten* 1887, zitiert nach Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, S.378ff.)

Der Begriff der Kardinalzahl wird also durch aktive Geistestätigkeit - und nicht etwa durch Rückgriff auf Axiome - gebildet, und er entsteht durch einen zweifachen Abstraktionsakt. (Das soll auch durch die Schreibweise \overline{M} (doppelt überstrichen) als Kardinalzahl der Menge M zum Ausdruck kommen.)

Cantor führt weiter aus:

³⁴ α bezeichnet (irgend)eine Kardinalzahl

„Da aus jedem einzelnen Elemente m , wenn man von seiner Beschaffenheit absieht, eine ‚Eins‘ wird, so ist die Kardinalzahl M (Doppelstrich) selbst eine bestimmte aus lauter Einsen zusammengesetzte Menge, die als intellektuelles Abbild oder Projektion der gegebenen Menge M in unserem Geiste Existenz hat.“ (Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, S.283)

Da zwischen den Elementen von M und den Einsen ihrer Kardinalzahl M (Doppelstrich) ein eindeutiges Zuordnungsverhältnis besteht, ergibt sich somit auch eine Äquivalenz zwischen der Menge selbst und ihrer Kardinalzahl.

2) In einer Rezension einer Schrift von Frege aus dem Jahr 1885 findet sich folgende Definition:

„Ich nenne ‚Mächtigkeit eines Inbegriffs oder einer Menge von Elementen‘ (...) denjenigen Allgemeinbegriff, unter welchen alle Mengen, welche der gegebenen Menge äquivalent sind, und nur diese fallen“ (Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, S.441)

(Kommentar: Decken sich diese beiden Arten der Definition? Setzt man in der 2. Definition für „Allgemeinbegriff“ den Begriff „Menge“ ein, dann ist die Mächtigkeit oder Kardinalzahl einer Menge M die Menge aller zu M äquivalenten Mengen. Dann kann aber m.E. die Kardinalzahl nicht mehr äquivalent zu der Menge selbst sein.)

In *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten* (1887) verwendet Cantor beide Definitionen. (vgl. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, S.378ff.)

Ordnungstypus / Ordnungszahl:

1)

„Jeder geordneten Menge M kommt ein bestimmter ‚Ordnungstypus‘ oder kürzer ein bestimmter ‚Typus‘ zu, den wir mit M (Strich) bezeichnen wollen; hierunter verstehen wir *den Allgemeinbegriff, welcher sich aus M ergibt, wenn wir nur von der Beschaffenheit der Elemente m abstrahieren, die Rangordnung unter ihnen aber beibehalten.*

Darnach ist der Ordnungstypus M (Strich) *selbst eine geordnete Menge*, deren Elemente *lauter Einsen* sind, die dieselbe Rangordnung untereinander haben wie die entsprechenden Elemente von M , aus denen sie durch Abstraktion hervorgegangen sind.“ (Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, S.297)

Der *Ordnungstypus* ergibt sich also durch *nur einen* Abstraktionsakt, abstrahiert man weiter auch noch von der Rangordnung der Elemente, so erhält man die zur Menge M und zum Ordnungstypus M (Strich) gehörige Kardinalzahl.

In Analogie zum Begriff der *Äquivalenz* von Mengen definiert Cantor den der *Ähnlichkeit*:

„Zwei geordnete Mengen M und N nennen wir ‚ähnlich‘, wenn sie sich gegenseitig eindeutig einander so zuordnen lassen, daß wenn m_1 und m_2 irgend zwei Elemente von M , n_1 und n_2 die entsprechenden Elemente von N sind, alsdann immer die Rangbeziehung von m_1 zu m_2 innerhalb M dieselbe ist wie die von n_1 zu n_2 innerhalb N .“ (Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, S.297)

Die Ordnungsbeziehung der Elemente muss also erhalten bleiben.

Aus der Ähnlichkeit geordneter Mengen folgt stets ihre Äquivalenz – man kann die Elemente ihrer Ordnung entsprechend aufeinander beziehen - , dagegen können geordnete Mengen äquivalent sein, ohne ähnlich zu sein.

Zur Terminologie Ordnungstypus – Ordnungszahl:

„Den Ordnungstypus einer wohlgeordneten Menge F nennen wir die ihr zukommende ‚Ordnungszahl‘.“ ([W] S.321)

2) In der oben genannten Rezension einer Schrift von Frege verwendet Cantor folgende Definition:

„... und zwar verstehe ich unter der ‚Anzahl oder Ordnungszahl einer wohlgeordneten Menge‘ denjenigen Allgemeinbegriff, unter welchen alle wohlgeordneten Mengen, welche der gegebenen *ähnlich* sind, und nur diese fallen. (Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, S.441)

(Kommentar: Auch hier lässt sich die Frage anschließen, ob die beiden Definitionen inhaltlich gleichbedeutend sind.)

Rechnen mit transfiniten Zahlen:

Hier ist zu unterscheiden zwischen der Arithmetik der Kardinalzahlen und der Arithmetik der Ordinalzahlen. Während erstere im allgemeinen den aus dem Endlichen bekannten Gesetzen folgt, trifft das auf das Rechnen mit Ordinalzahlen nicht in jedem Fall zu.

Arithmetik der Kardinalzahlen:

(nach: *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, 1895, Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, S.285ff.)

1) Addition

Die Vereinigung zweier Mengen M und N bezeichnet Cantor als „*Vereinigungsmenge* von M und N “. Sind α und β die Kardinalzahlen von M und N , dann ist die Summe $\alpha + \beta$ die Kardinalzahl der Vereinigungsmenge.

Da im Begriff der Mächtigkeit von der Ordnung der Elemente abstrahiert ist, gelten das Kommutativ- und das Assoziativgesetz:

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$

2) Multiplikation

Hier führt Cantor den Begriff der *Verbindungs Menge* ein:

$$(M \times N) = \{(m, n)\},$$

wobei jedes Element m der Menge M mit jedem Element n der Menge N zu einem Paar verbunden wird.

Da die Mächtigkeit von $(M \times N)$ nur von den Kardinalzahlen α und β der Mengen M und N abhängt, ist diese gleich $\alpha \times \beta$. Es gelten das Kommutativ-, das Assoziativ- und das Distributivgesetz:

$$\alpha \times \beta = \beta \times \alpha$$

$$\alpha \times (\beta \times \gamma) = (\alpha \times \beta) \times \gamma$$

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

3) Potenzierung

Eine Funktion, die jedes Element n von N mit je einem bestimmten Element von M verbindet, wobei jedes Element von M wiederholt zur Anwendung kommen kann, bezeichnet Cantor als „Belegungsfunktion von n “. Die Gesamtheit aller verschiedenen Belegungen von N mit M bildet die „Belegungsmenge von N mit M “ und wird bezeichnet durch $(N \mid M)$. Sie hängt von den Kardinalzahlen α und β der Mengen M und N ab, die Potenz α^β ist daher gleich der Kardinalzahl von $(N \mid M)$. Es gelten das Assoziativ- und das Distributivgesetz:

$$\alpha^\beta \times \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$$

$$\alpha^\gamma \times \beta^\gamma = (\alpha \times \beta)^\gamma$$

$$(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \times \gamma}$$

Das wahrscheinlich wichtigste Anwendungsbeispiel liefert den Satz $c = 2^{\aleph_0}$ mit $c =$ Mächtigkeit des Linearkontinuums und $\aleph_0 =$ Mächtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen. (Bleibt man bei der Schreibweise $(N \mid M)$, dann ist N die Menge der natürlichen Zahlen und M eine Menge der Mächtigkeit 2. Die Menge aller möglichen Belegungen der Elemente $n \in N$ mit 2 Werten 0 und 1 liefert die Menge aller Teilmengen von N , deren Mächtigkeit Cantors Vermutung zufolge die des Linearkontinuums ist.)

Arithmetik der Ordinalzahlen:

(nach: *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, 1895, Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, S.301ff.)

1) Addition

Die Vereinigungsmenge (M, N) zweier geordneter Mengen M und N ist selbst eine geordnete Menge, in welcher die Rangordnung der Elemente von M und N jeweils beibehalten wird, aber alle Elemente von M niedrigeren Rang haben als alle Elemente von N . Sind α und β die Ordnungszahlen von M und N , dann ist $\alpha + \beta$ die Ordnungszahl von (M, N) , wobei α als Augendus, β als Augendus bezeichnet wird.

Es gilt das Assoziationsgesetz

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma.$$

Das kommutative Gesetz ist dagegen nicht gültig: Addiert man ein einzelnes Element f zu einer geordneten Menge E des Typus der natürlichen Zahlen (ω), dann ist die Menge

$$(f, E) = (f, e_1, e_2, \dots, e_\nu, \dots)$$

der Menge E ähnlich (sie hat kein höchstes Glied), daher ist $1 + \omega = \omega$.

Die Menge

$$(E, f) = (e_1, e_2, \dots, e_\nu, \dots, f)$$

besitzt jedoch ein höchstes Glied und ist daher von ω unterschieden.

2) Multiplikation

Die Multiplikation von Ordnungszahlen definiert Cantor folgendermaßen:

„Aus zwei geordneten Mengen M und N mit den Typen α und β läßt sich eine geordnete Menge S dadurch herstellen, daß in N an Stelle jedes Elementes n eine geordnete Menge M_n substituiert wird, welche denselben Typus α wie M hat, also

$$M_n(\text{Strich}) = \alpha,$$

und daß über die Rangordnung in

$$S = \{ M_n \}$$

folgende Bestimmungen getroffen werden:

1. je zwei Elemente von S , welche einer und derselben Menge M_n angehören, behalten in S dieselbe Rangbeziehung wie in M_n ,
2. je zwei Elemente von S , welche zwei verschiedenen Mengen M_{n_1} und M_{n_2} angehören, erhalten in S die Rangbeziehung, welche n_1 und n_2 in N haben." ([W] S.302)

Der Ordnungstypus von S wird definiert als $\alpha \times \beta$, wobei α *Multiplikandus*, β *Multiplikator* heißt.

Das Assoziationsgesetz besitzt Gültigkeit:

$$\alpha \times (\beta \times \gamma) = (\alpha \times \beta) \times \gamma$$

Das Distributionsgesetz

$$\alpha (\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

gilt nur dann, wenn der zweigliedrige Faktor die Rolle des Multiplikators einnimmt.

Das Kommutationsgesetz ist im allgemeinen nicht gültig:

$$2 \times \omega = (e_{1j}, f_{1j}; e_{2j}, f_{2j}; \dots; e_{vj}, f_{vj}; \dots) = \omega,$$

wogegen

$$\omega \times 2 = (e_{1j}, e_{2j}, \dots, e_{vj}, \dots; f_{1j}, f_{2j}, \dots, f_{vj}, \dots)$$

von ω unterschieden ist.

Aleph 0 und Aleph 1:

Cantor spricht an mehreren Stellen von einer Einteilung der Zahlen in Klassen (vgl. etwa *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* 1883, [W] S.165ff.), ohne dabei die Terminologie der „Alephs“ zu verwenden.

In den *Beiträgen zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* (1895, [W] S.282ff.) untersucht Cantor die ersten beiden Zahlenklassen mit der Kardinalität Aleph 0 und Aleph 1.³⁵ Er definiert Aleph 0 mithilfe der endlichen Kardinalzahlen wie folgt: „Die Gesamtheit *aller endlichen Kardinalzahlen* v bietet uns das nächstliegende Beispiel einer transfiniten Menge; wir nennen die ihr zukommende Kardinalzahl „*Alef-null*“, in Zeichen \aleph_0 , definieren also

$\aleph_0 = \{v\}$ (doppelt überstrichen).“ (Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, S. 293)

\aleph_0 ist größer als jede endliche Zahl, andererseits aber die kleinste transfiniten Kardinalzahl und entspricht der Gesamtheit der natürlichen Zahlen. Da bei endlichen Zahlen der Begriff der Kardinal- und der Ordinalzahl zusammenfallen, kann man die erste Zahlenklasse auch als Gesamtheit aller endlichen Ordnungszahlen bezeichnen.

Anders verhält es sich im Bereich der transfiniten Ordnungszahlen: Zu ein- und derselben transfiniten Kardinalzahl gibt es eine unendliche Anzahl von Ordnungszahlen. Darauf beruht Cantors Definition der zweiten Zahlenklasse: „Die zweite Zahlenklasse $Z(\aleph_0)$ ist die Gesamtheit aller Ordnungstypen α wohlgeordneter Mengen von der Kardinalzahl \aleph_0 .“ (Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, S.325)

³⁵ Cantor verwendet die Schreibweise Alef-null und Alef-eins.

Welche Kardinalzahl kommt dieser Zahlenklasse zu? „Die Mächtigkeit der zweiten Zahlenklasse $\{\alpha\}$ ist die zweitkleinste transfinite Kardinalzahl Alef-eins.“ (Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, S.333) – Es gibt also keine Kardinalzahl, die in ihren Eigenschaften zwischen \aleph_0 und \aleph_1 liegt.

Cantor vermutete, dass das Linearkontinuum die Mächtigkeit der zweiten Zahlenklasse habe (vgl. etwa Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, S.192) – die sog. Kontinuumshypothese, deren Nachweis bekanntlich nicht gelang.

In einem Brief an Dedekind weist Cantor auf die Möglichkeit der Konstruktion immer höherer Mächtigkeiten hin:

„Sie wissen, daß ich schon vor vielen Jahren zu einer wohlgeordneten Folge von Mächtigkeiten oder transfiniten Kardinalzahlen gelangt bin, die ich die ‚Alefs‘ nenne:

$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \dots, \aleph_{\omega_0}, \dots$

\aleph_0 bedeutet die Mächtigkeit der im gebräuchlichen Sinn ‚abzählbaren‘ Mengen, \aleph_1 ist die nächstgrößere Kardinalzahl, \aleph_2 dann die nächstgrößere usf.; \aleph_{ω_0} ist die auf alle \aleph_ν nächstfolgende (d.h. nächstgrößere) und gleich

$\lim_{\nu \rightarrow \omega_0} \aleph_\nu$

$\nu \rightarrow \omega_0$

usw.“ (Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, S.443)

II.3) Unendliche kleine Zahlen?

Ausgearbeitet von: Elisabeth Flucher

In einem Brief an Heman sagt Cantor, dass unendlich kleine Zahlen „unmöglich“ sind. Es gebe keine „actual unendlich kleinen Grössen“.³⁶ Mithilfe der Lehre von den „actual unendlich großen Zahlen“ könne die Unmöglichkeit der unendlich kleinen Größen bewiesen werden. Einen Beweis gibt er an dieser Stelle nicht. (Cantor, Brief an Heman vom 2. Juni 1888)

In seinem Aufsatz „Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten“ nimmt er das Problem wieder auf und will einen „förmlichen“ Beweis liefern. (Cantor, „Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten“, S. 407-409) In seinem Aufsatz „Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre“ hatte er die Begründung seiner Ansicht nur angedeutet und nicht näher ausgeführt, wie die Unmöglichkeit der unendlich kleinen Zahlen aus der Lehre vom Transfiniten folgt.

Der Satz des Beweises lautet: „Von Null verschiedene lineare Zahlengrößen ζ (d.h. kurz gesagt, solche Zahlgrößen, welche sich unter dem Bilde begrenzter geradliniger stetiger Strecken vorstellen lassen), welche kleiner wären als jede noch so kleine endliche Zahlgröße, gibt es nicht, d.h. sie widersprechen dem Begriff der linearen Zahlgröße.“ (Cantor, „Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten“, S. 407)

Die Zahl ζ wird als so klein angenommen, dass ihr n -faches ($\zeta \cdot n$) für jede noch so große endliche Zahl n kleiner ist als 1. Das v -fache von ζ muss daher kleiner sein „als jede noch so kleine endliche Größe, wenn v irgendeine noch so große *transfinite* Ordnungszahl (d.h. Anzahl oder Typus einer wohlgeordneten Menge) aus irgendeiner noch so hohen Zahlenklasse bedeutet.“ (Cantor, „Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten“, S. 408) Das bedeutet, dass ζ durch Multiplikation mit keiner noch so großen Zahl („durch keine noch so kräftige actual unendliche Vervielfachung“) „endlich gemacht werden“ kann. ζ kann also nicht „Element“ oder „integrierender Teil“ einer endlichen linearen Größe sein. Die Voraussetzung muss aufgegeben werden, weil sie in einen Widerspruch führt. Es gibt also keine Zahl ζ , für die, für jede beliebige Zahl n , gilt, dass ζ kleiner wäre als $1/n$.

Zugleich habe Cantor das Axiom des Archimedes bewiesen, das besagt, dass „aus jeder noch so kleinen begrenzten geradlinigen Strecke durch endliche, hinreichend große Vervielfachung beliebig große endliche Strecken erzeugt werden können“. (Cantor, „Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten“, S. 408) Es sei also kein Axiom, sondern ein bewiesener Satz.

³⁶ Cantors Kritik bezieht sich auf Joseph Pohle, „Ueber die actuale Bestimmtheit des unendlich Kleinen“ (1893).

III) Philosophische Fragestellungen

III.1) Das Unendliche aktual?

Ausgearbeitet von: Marlies Wilhelm, Mathias Thaler

Da bereits in Kapitel 1 die unterschiedlichen Definitionen und Schwierigkeiten einer genauen und widerspruchsfreien Definition von Cantors Begrifflichkeit innerhalb seiner Texte betrachtet wurde, soll an dieser Stelle vor allem auf seine Abgrenzung von Aristoteles und Thomas von Aquin eingegangen werden. Zur Erinnerung und um seiner Kritik an Aristoteles und Thomas von Aquin besser einordnen zu können, folgen wir Cantor zunächst in seiner Definition über das Aktual-Unendliche im Jahre 1886:

„[...] erstens, sofern es in Deo extramundano aeterno omnipotenti sive natura naturante, wo es das Absolute heißt, zweitens sofern es in concreto seu in natura naturata vorkommt, wo ich es Transfinitum nenne und drittens kann das A.-U. in abstracto in Frage gezogen werden, d. h. sofern es von der menschlichen Erkenntnis in Form von aktual-unendlichen, oder wie ich sie genannt habe, von transfiniten Zahlen oder in noch allgemeinerer Form der transfiniten Ordnungstypen [...] aufgefasst werden könne.“ (Cantor „Über die verschiedenen Standpunkte in bezug auf das actuale Unendliche“: S. 372)

Cantor selbst geht von der Existenz des Aktual-Unendlichen also sowohl in Abstracto, als auch in Concreto aus. Wie er selbst ausführt, wird diese Ansicht jedoch nicht sehr geteilt. Da es für ihn von besonderer Bedeutung ist, dass seine Schriften nicht im Widerspruch mit anderen Wissenschaften stehen, versucht er die Gegenargumente zu entkräften. Außerdem möchte er sicherstellen, dass er in keiner Weise durch seine Theorie die Allmacht Gottes in Frage stellt (Vgl. Tapp *Kardinalität und Kardinäle*: S. 90). Im Brief vom 26.3.1887 an Alois Schmid beschreibt Cantor in Kürze, worauf viele seiner Ansicht nach falschen Überzeugungen über das Aktuale-Unendliche zurück gehen: „alle sogenannten Beweise [...] gegen das geschöpfliche A. U. beweisen nichts, weil sie sich nicht auf die richtige Definition des transfiniten beziehen.“ (Cantor Briefe an Schmid CanSch87a: S. 499) Oder ausführlicher:

„Alle sogenannten Beweise wider die Möglichkeit aktual unendlicher Zahlen sind, wie in jedem Falle besonders gezeigt und auch aus allgemeinen Gründen geschlossen werden kann, der Hauptsache nach dadurch fehlerhaft, und darin liegt ihr $\pi\rho\acute{\omega}\tau\omicron\nu\ \psi\epsilon\acute{\upsilon}\delta\omicron\varsigma$, daß sie von vornherein den in Frage stehenden Zahlen alle Eigenschaften der endlichen Zahlen zumuten oder vielmehr aufdrängen, während die unendlichen Zahlen doch andererseits, wenn sie überhaupt in irgendeiner Form denkbar sein sollen, durch ihren Gegensatz zu den endlichen Zahlen ein ganz neues Zahlengeschlecht konstituieren müssen, dessen Beschaffenheit von der Natur der Dinge durchaus abhängig und Gegenstand der Forschung, nicht aber unserer Willkür oder unserer Vorurteile ist.“ (Cantor „Über die verschiedenen Standpunkte in bezug auf das actuale Unendliche“: S. 371f)

In der Folge beschreibt er im Brief an Schmid, dass die zwei wichtigsten Argumente, die gegen die Existenz des Aktual-Unendlichen vorgebracht wurden von Thomas von Aquin stammen. Dieser bezieht sich wiederum auf Aristoteles Ablehnung des Aktual-Unendlichen.

Folgen wir also zunächst Aristoteles Überlegungen zum „Unbegrenzten“, die vor allem seiner Schrift Physik zu entnehmen sind.

Aristoteles

Aristoteles befasst sich nun also vor allem im 3. Buch mit den Auffassungen über das „Unbegrenzte“:

„Denn alles ist entweder Anfang oder hat einen Anfang. Das Unbegrenzte aber hat keinen Anfang, denn sonst hätte es eine Grenze. Auch ist es unentstanden und unvergänglich, indem es Anfang ist. Denn was entstanden ist, muß ein Endziel nehmen, und ein Ende hat aller Untergang. Darum scheint, wie wir sagen, nicht dieses einen Anfang, sondern das Uebrige diese zum Anfang zu haben, und Alles von ihm umgeben und geleitet zu werden, wie diejenigen sagen, die nicht außer dem Unbegrenzten noch andere Anfänge annehmen, wie den Gedanken oder die Freundschaft; ja dieses gilt für das Göttliche, weil unsterblich und unvergänglich, wie Anaximander sagt und die Meisten der Naturforscher.“ (Aristoteles: Physik, Buch 3, Kapitel 4: S. 60)

Die zitierte Stelle verweist auf das, was Cantor wohl am Ehesten mit Gott oder dem Absoluten bezeichnen würde.

Aristoteles beginnt seine Darstellung, warum die Annahme des Unendlichen für ihn abgesehen von diesem göttlichen Unbegrenzten, zumindest in einem gewissen Sinne abzulehnen ist, indem er zunächst Gründe auflistet, die für ein Unendliches sprechen würden:

„Von dem Sein aber des Unbegrenzten möchte die Ueberzeugung vornehmlich aus fünf Umständen für den Betrachter hervorgehen. Erstens aus der Zeit, denn diese ist unbegrenzt; dann aus der Theilung der Größen, denn es bedienen sich auch die Mathematiker des Unbegrenzten. Ferner daß nur so nie ausgeht Entstehung und Untergang, wenn es ein Unbegrenztes giebt, woher genommen wird das Werdende. Ferner, daß das Begrenzte stets an etwas grenzt; so daß es nothwendig keine äußerste Grenze giebt, wenn stets grenzen muß Eines an das Andere. Am meisten aber und hauptsächlich, was die gemeinschaftliche Verlegenheit erregt in Allen. Weil nämlich das Denken kein Ende findet, darum gilt die Zahl für unbegrenzt, und die mathematischen Größen, und was außerhalb des Himmels.“ (Aristoteles: Physik, Buch 3, Kapitel 4: S. 60)

Für Aristoteles ergeben sich demnach viele Schwierigkeiten ein Unendliches anzunehmen, da er von einem einzigen Unbegrenzten ausgeht, das sich widersprechende Eigenschaften in sich vereinen muss. Alleine, da das Unendliche vorstellbar ist, muss es dennoch in einer Art vorkommen. Cantor ist es durch seine Unterscheidung in Absolutem und Transfinitem möglich diesen Widersprüchen aus dem Weg zu gehen. Nach diesen Abgrenzungen versucht Aristoteles seine Fragestellung für die weiteren Erörterungen darzulegen:

„Denn sowohl wenn man setzt, es sei nicht, folgt Vieles als unmöglich, als auch wenn man setzt, es sei. Ferner fragt sich, auf welche Weise es ist, ob als Wesen, oder als an und für sich Unhängendes irgend einer Wesenheit, oder auf keine von beiden Weisen, aber so, daß es nichts desto weniger ein Unbegrenztes gebe, oder Unbegrenzte an Menge.“ (Aristoteles:

Physik, Buch 3, Kapitel 4: S. 60f.)

Aristoteles stellt also die Frage, ob das Unendliche in einem Wesen ist, ob es Teil einer Wesenheit ist, was wiederum Cantors Absolutum wäre, oder ob es eine unbegrenzte Menge ist, was wohl sein Äquivalent im Transfiniten in Abstracto hätte. Schließlich stellt er aber in Cantors Worten die Frage nach dem Aktualen Unendlichen: „Vornehmlich hat der Naturforscher zu betrachten, ob es eine empfindbare Größe als unbegrenzte giebt.“ (Aristoteles: Physik, Buch 3, Kapitel 4: S. 61)

Er fährt fort, indem er anhand verschiedener Annahmen versucht zu umreißen was nun das Unendliche sei oder nicht sei:

„Ueberhaupt nämlich besteht zwar darin das Unbegrenzte, daß immer und immer von ihm etwas anderes genommen wird, und daß das Genommene zwar stets ein begrenztes ist, aber stets ein anderes und wieder ein anderes. [...] Auf andere Art nun nicht, auf diese aber giebt es ein Unbegrenztes: der Möglichkeit und der Zerfällung nach. [...] Auch nach Zusetzung also giebt es solchergestalt ein Unbegrenztes der Möglichkeit nach, von welchem wir sagen, es sei das nämliche gewissermaßen mit dem nach Theilung. Stets nämlich hat es einen Theil seiner selbst außer sich. Nie jedoch übersteigt es alle bestimmte Größe, wie es bei der Theilung alles bestimmte übersteigt, und kleiner wird. [...] Nicht nämlich was nichts außer sich, sondern was stets etwas außer sich hat, dieses ist das Unbegrenzte. (Aristoteles: Physik, Buch 3, Kapitel 6: S. 68ff.)

Es wird hier ersichtlich, dass der Begriff des „Unbegrenzten“ bei Aristoteles in einer gewissen Art keiner so scharfen definitorischen Unterscheidung unterliegt, was wie schon oben erwähnt, aus Cantors Perspektive wohl auf die nicht vorgenommene Differenzierung zwischen Absolutem und Transfiniten zurück zu führen wäre.

Nach Cantor hat Aristoteles jenseits der Vorstellung des Absoluten nur einen Begriff des Unendlichen, den er in den Grundlagen 1883 zunächst als „Uneigentlich-unendliches“ bezeichnet. Den Begriff bezieht er auf seinerzeit gängige mathematische Definitionen des Unendlichen als

„einer veränderlichen, entweder über alle Grenzen hinaus wachsenden oder bis zu beliebiger Kleinheit abnehmenden, aber stets endlich bleibenden Größe [...] Ich nenne dieses Unendliche das Uneigentlich-unendliche.“ (Cantor „Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre“: S. 165)

Später definiert er das Potential-Unendliche als „veränderliche endliche, über alle endliche Grenzen hinaus wachsende Größe [...]“ (Cantor „Über die verschiedenen Standpunkte in bezug auf das actuale Unendliche“: S. 374). Cantor bringt in Briefen, wie bei Schmid und in den Texten immer wieder kurz ein, dass Aristoteles nur über das Absolute oder eben eine potenzielle Unendlichkeitsauffassung verfüge. Aufgrund der Annahmen, die Aristoteles über Größen und Zahlen hatte, war es auch schlüssig Aktual-Unendliches abzulehnen. Dies wird etwa aus folgender Stelle deutlich:

„Wir aber fragen von dem Empfindbaren und von dem, worauf wir hier ausgehen, ob es in ihm giebt oder nicht giebt einem Körper unbegrenzt in Bezug auf die Vermehrung. Dem bloßen Begriffe nach betrachtet, könnte es ungefähr aus Folgendem scheinen, keinen zu geben. Wenn der Begriff eines Körpers ist, das auf einer Fläche Bestimmte, so möchte es

keinen unbegrenzten Körper geben, weder denkbaren, noch empfindbaren. Ja auch keine Zahl zugleich für sich bestehend und unbegrenzt. Denn Zählbares ist die Zahl oder was Zahl hat. Wenn nun das Zahlbare gezählt werden mag, so müßte auch durchgegangen werden können das Unbegrenzte. – Mehr naturwissenschaftlich betrachtet aber aus diesem. Weder ein zusammengesetzter darf es sein, noch ein einfacher, denn als zusammengesetzten zwar wird es keinen unbegrenzten Körper geben, wenn begrenzt an Menge seine Elemente sein sollen. Denn es müßten dann mehre sein, und im Gleichgewicht stets die entgegengesetzten, und keines unter ihnen ein unbegrenztes. Denn wenn auch irgendwie die Kraft des einen Körpers geringer ist als die des andern, z.B. wenn, das Feuer als begrenzt, die Luft als unbegrenzt gesetzt, ein Theil Feuer ein gleiches Theil Luft um ein gewisses Maß an Kraft übertrifft, nur daß dieses Maß ein durch Zahl ausdrückbares ist: so ist dennoch ersichtlich, daß der unbegrenzte Körper überwältigen und aufzehren wird den begrenzten. Daß aber jeder Bestandtheil unbegrenzt sei, ist unmöglich.“ (Aristoteles: Physik, Buch 3, Kapitel 5: S. 63f)

In seinem Text über die Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre (1883) verweist Cantor auf diese Textstelle, die er allerdings der Metaphysik entnimmt. Zwei Argumente bringt Aristoteles vor, einerseits die Unmöglichkeit der Abzählbarkeit von unendlichen Zahlen oder Mengen. Andererseits, dass das Endliche oder einer ein endlicher Körper oder Zahl von einer unendlichen Menge ausgelöscht werden würde.

Im ersten Fall bezieht sich Cantor auf seine Beweisführung, dass sofern unendliche Mengen nicht wie endliche behandelt werden, diese zählbar sind, dass jedenfalls eben ihre Anordnung von Bedeutung ist. Auch die zweite Annahme Aristoteles' kann er in ähnlicher Art entkräften. Eine endliche Zahl, so hat er gezeigt, geht in einer unendlichen Menge nicht auf, nur die unendliche Menge erfährt durch die endliche eine Veränderung (Vgl. Cantor „Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre“: S. 174).

Cantors Kritik an Thomas von Aquin

Wie bereits Aristoteles unterscheidet auch Thomas von Aquin zwischen potenziell und aktual unendlichen Mengen. Dabei ist die potentiell unendliche Menge, eine nicht stets vorhandene Größe, sondern eine sich in vielen Zeitpunkten entfalten oder zu konstruierende.

So schreibt Thomas:

„impossibile est esse multitudinem infinitam actu“

(„Es ist unmöglich, dass [es] eine aktual unendliche Menge gibt“) (Tapp *Kardinalität und Kardinäle*: S. 93)

Thomas begründet diese Behauptung durch zwei mächtige Argumente, die auch Cantor als die stärksten Einwände erkennt und zu widerlegen sucht.

Das erste Argument liest sich wie folgt:

„Omnem multitudinem oportet esse in aliqua specie multitudinis. Species autem multitudinis sunt secundum species numerorum. Nulla autem species numeri est infinita; quia quilibet numerus est multitudo mensurata per unum. Unde impossibile est esse multitudinem infinitam actu; sive per se, sive per accidens.“

(„Jede Menge muss irgend einer Art von Mengen angehören. Die Arten einer Menge aber richten sich nach den Arten der Zahlen. Keine Art von Zahlen aber ist unendlich; denn jede Zahl ist eine durch die eins gemessene Menge also kann es unmöglich, sei es per se, sei es per accidens, eine aktual unendliche Menge geben.“) (Tapp *Kardinalität und Kardinäle*: S. 93)

Was Thomas hier unausgesprochen zu Grunde legt ist die

"Annahme, dass nur endliche Mengen durch die Einheit quantitativ bestimmbar seien. Deshalb wäre dann konsequenterweise auch keine Art von Zahlen (Zahlenspecies) unendlich und aus dem allgemeinen Postulat, jeder Menge müsse eine bestimmte Zahl zukommen, würde im Fall einer unendlichen Menge tatsächlich ein Problem erwachsen." (Tapp *Kardinalität und Kardinäle*: S. 93)

Dieses Problem will Cantor durch ein Individuations- und ein Anordnungsprinzip für die aktual unendlichen Zahlen lösen.

Aber zunächst muss er neu definieren was unter einer Menge verstanden werden soll. Dies macht Cantor in seiner Schrift: „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre“ wo die Definition wie folgt formuliert wird:

„Unter einer 'Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die 'Elemente' von M genannt werden) zu einem Ganzen.“ (Cantor „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre“: S. 31)

Nun muss er noch zeigen, dass jeder geordneten Menge M auch ein Ordnungstypus zukommen kann:

„Jeder geordneten Menge M kommt ein bestimmter 'Ordnungstypus' [...] zu, den wir mit M- bezeichnen wollen; hierunter verstehen wir den Allgemeinbegriff, welcher sich aus M ergibt, wenn wir von der Beschaffenheit der Elemente m abstrahieren, die Rangordnung unter ihnen aber beibehalten.“ (Reichhalter *Grundzüge der Entwicklung der Mengenlehre von Cantor bis Zermelo*: S.)

Das zweite Argument lautet so:

„Item omnis multitudo in rerum natura existens est creata; et omne creatum sub aliqua certa intensione creantis comprehenditur; non enim in vanum agens aliquod operatur. Unde necesse est quod sub certo numero omnia creata comprehendatur. Impossibile est ergo esse multitudinem infinitam in actu, etiam per accidens.“

(„Desgleichen ist jede Menge, die in der Natur der Dinge existiert, geschaffen; und jedes geschaffene unterliegt einer bestimmten Absicht des Schaffenden; denn kein Wirkender wirkt ziellos. Daher kann es unmöglich eine aktual unendliche Menge geben, auch nicht per accidens.“) (Tapp, *Kardinalität und Kardinäle*: S. 94)

Zu diesem Argument bemerkt Tapp richtig, dass es unvollständig sei: „[...] denn es ist nicht aus dem Argument selbst zu sehen, wie der Übergang von der Bestimmtheit der Schöpfungsabsicht zur Bestimmtheit der Zahl und von dieser zur notwendigen Endlichkeit der Zahl erfolgen soll.“ (Tapp *Kardinalität und Kardinäle*: S. 94) Außerdem, setzt das zweite Argument das Vorangegangene voraus. Beiden Argumenten ist gemeinsam, dass sie einen Unendlichkeitsbegriff verwenden, der unbewiesener Maßen die Unbestimmtheit der Unendlichkeit voraussetzt.

Thomas lehnt also wie sein Vorbild Aristoteles die Unendlichkeit in actu ab. Nur scheinbar relativiert er diese seine Überzeugung, wenn an einer Stelle seines opusculums mit dem Titel *De aeternitate mundi contra murmurantes* schreibt:

„Et praeterea non est adhuc demonstratum, quod Deus non possit facere ut sint infinita actu.“

(„Und außerdem ist bis jetzt noch nicht bewiesen, dass Gott nicht machen könnte, dass es aktual unendliches gibt.“) (Tapp *Kardinalität und Kardinäle*: S. 94)

Dieser scheinbare Widerspruch löst sich meiner Meinung nach auf, sobald man die Betonung des Satzes auf das *jetzt* verschiebt. Denn für den christlichen Denker Thomas, bleibt alles von Gott geschaffene von Anbeginn der Schöpfung in der Zeit und damit in einem bloß defizitären vorläufigen Zustand. Was natürlich nicht ausschließt, dass nach dem verstreichen von unendlich viel Zeit so etwas wie ein aktual unendliches entstehen könnte. Auch für Christian Trapp, scheint diese Aussage interpretationsbedürftig zu sein:

"Die Bedeutung dieser Stelle hängt entscheidend von der Deutung des Neutrums Plural infinita ab. Es könnte sich um den abstrakten Neutrml Plural handeln, der häufig für nicht näher bestimmtes steht und hier am besten mit „unendliches“ wiederzugeben wäre. Es könnte natürlich auch ein wirklicher Plural sein, der eine Anzahl meint, im Sinne von: 'unendlich viele'. In letzterem Sinne fasste Cantor die Stelle auf[...]" (Tapp *Kardinalität und Kardinäle*: S. 94)

Summa summarum bleibt Thomas dem heidnischen Aristoteles, den er kurz *den* Philosophen nennt treu. Denn mit diesem Satz ist nichts weiter ausgesagt, als dass auch in der Gesamtheit der Schöpfung die Unendlichkeit einzig potenziell (der Kraft nach) enthalten ist. Auch die christliche Überzeugung von der Linearität der Zeit, mit einem Anfang, der creatio ex nihilo und einem apokalyptischem Ende mag die Ablehnung der Unendlichkeit in actu durch Thomas befördert haben. Selbst wenn er zu dem Standpunkt neigt die Aristotelische Lehre von der Ungeschaffenheit der Welt und die der christlichen creatio ex nihilo, als gleichermaßen unbeweisbar zu halten.

III.2) Das unendliche Bestehen der Welt?

Ausgearbeitet von: Renate-Maria Degenfeld, Sarah Gutleiderer, Franz Lackner

III.2.1) Warum ist Cantor diese Frage so wichtig?

Die Frage nach dem unendlichen Bestehen der Welt ermöglicht es Cantor die von ihm postulierte Existenz unendlicher Zahlen in den Kontext der Schöpfung einzuordnen.

II.2.2) Welche Schlüsse zieht Cantor aus den Argumenten von Thomas von Aquin für seine eigene Theorie?

Diskutiert werden sowohl bei Thomas von Aquin, als auch bei Cantor die folgenden Fragen:

- Ist die Welt an einen zeitlichen Anfang geknüpft?
- Ist Gott allmächtig und alle unsere vermeintlich Unendliche nur unüberschaubare Endliche?

Thomas von Aquin – Zusammenfassungen der wichtigsten Textstellen

S.th.p.1,q.7,a.3: Gibt es ein wirklich Unendliches der Größe nach?

(zitiert nach: Thomas von Aquin: *Summa theologica*. Übersetzt von Dominikanern und Benediktinern Deutschlands und Österreichs. Bd. 1. Verlag Anton Pustet. Salzburg und Leipzig 1934, S. 131-136)

Ein Ding kann dem Wesen nach nicht unendlich sein, aber kann es der Größe nach unendlich sein?

- Der naturwirkliche Körper hat eine Wesensform und ist daher nicht unendlich, auch weil dann keine Bewegung möglich wäre.
- Der mathematische Körper hat ebenfalls Gestalt und Körper und ist daher endlich.
- Eine endliche Linie wird in der Mathematik als unendlich bezeichnet, weil sie aus unendlich vielen Teilen besteht.
- Jedes Ding gehört einer bestimmten Art von Größe an. Es gibt aber keine unendliche Größenart.
- Unendliches kann durch Teilung entstehen, aber nicht durch dazuzählen
- Größe ist eine ganzheitliche stoffliche Eigenschaft, die nicht mit Zeit und Bewegung vereinbar ist, da diese nacheinander ablaufen.

S.th.p.1,q.7,a.4 (S.136-140): Gibt es in den Dingen ein Unendliches der Zahl nach (unendliche Menge)?

Annahme: a) an sich unendliche Menge: Werden hängt von unendlich vielen Ursachen ab

b) zufällig unendliche Menge: ergibt sich ungewollt

aber: Jede Menge richtet sich nach der Art der Zahl und keine Zahl ist unendlich (Zahl ist bestimmbare Menge), jede Menge ist mit bestimmter Absicht geschaffen, der Schaffensprozess kann aber nicht ziellos sein!

Die Möglichkeit einer unendlichen Menge liegt in der Teilung.

- Eine Menge wird durch Zugabe von Mengen unendlich.
- Das gilt auch für die Menge der Figuren.
- eine als fertig unendlich gegebene Menge ist unmöglich.

S.th.p.1,q.14,a.12 (S. 43-47): Erkennt Gott Unendliches?

Gott erkennt Unendliches, weil:

- Gott nicht nur das Wirkliche, sondern auch das Mögliche erkennt
- Gott erkennt „im Wesen der Schau unendlich Vieles“, obwohl „ das Wissen der einfachen Schau“ das Unendliche nicht beinhaltet, denn die Welt ist endlich
- Der Mensch kann in jedem Menschen das Erkenntnisbild Mensch haben, Gott aber erkennt nicht nur die Ähnlichkeit, sondern auch die Besonderheit der einzelnen Dinge.
- Gott erkennt das Unendliche nicht Teil für Teil, sondern alles zugleich.
- Gott erfasst das Unendliche endlich, indem er es vollkommen erfasst.
- Jedes Ding ist vom Wissen Gottes her messbar, aber nicht der Größe, sondern dem Wesen nach.

S.th.p.1,q.46,a.2: Ist es ein Glaubenssatz, dass die Welt einen Anfang hat?

(vgl.: www.newadvent.org/summa , gelesen am 5.1.2010)

- Alles hat einen Anfang, daher ist der Beginn der Welt kein Glaubenssatz, aber nach Augustinus gibt es zwei Arten für den Glauben, dass die Welt ewig ist, nämlich dass die Substanz der Welt nicht von Gott kommt, was unmöglich ist und dass die Welt nicht zeitlich, sondern von der Schöpfung her ihren Anfang genommen hat, dann kann Gott aber nicht älter sein als seine Schöpfung.
- Die Welt muss aus dem Nichts entstanden sein, aber Schöpfung heißt etwas entsteht nach dem Nichts.
- Gott arbeitet bedingt durch seinen Intellekt nach einem Prinzip, daher hat die Welt nicht immer existiert, aber göttlicher und menschlicher Intellekt sind nicht vergleichbar.
- Wenn die Welt ewig wäre, gäbe es keine fixen Zeitpunkte im Weltgeschehen, die Änderung von z.B.: Landeinnahmen zeigt zwar den Fluss der Zeit, ist aber nach Aristoteles nicht Bedingung für die Neuheit der Welt.
- Wenn die Welt ewig ist, ist sie gleichzusetzen mit Gott, was unmöglich ist, für die Welt aber auch gar nicht stimmen kann.
- Ewige Zeit ist nicht durchschreitbar, aber die Zeit wird ohnehin Teil für Teil durchschritten.
- Wenn die Welt ewig ist, ist auch die Erschaffung ein ewiger Prozess, der Mensch

entsteht also aus dem Menschen, was unmöglich ist. Es gibt keinen Anstoß, nachdem die Erschaffung abläuft, sondern sie erfolgt zufällig.

- Wenn die Welt unendlich ist, gibt es unendlich viele Menschen mit unendlich vielen unsterblichen Seelen, daher muss die Welt einen Anfang haben.
- Dazu gibt es verschiedene Meinungen:
- unendlich viele Seelen sind zufällige Unendlichkeiten
- Seele verdirbt mit dem Körper
- Seele kehrt nach einiger Zeit wieder.
- Es ist ein Glaubenssatz, dass die Welt einen Anfang hat.

S.th.p.3, q.10,a.3 (S. 264-270): Kann die Seele Christi im Wort Unendliches erkennen?

Christus erkennt Unendliches im Wort insofern als,

- „Dagegen erkennt die Seele Christi im WORT unendlich viele Möglichkeiten. Sie weiß nämlich alles, was im Bereiche der geschöpflichen Kräfte möglich ist. Und weil das unendlich vieles ist, so erkennt sie eben auch unendlich vieles. Sie weiß es gleichsam wie im „Wissen der einfachen Erkenntnis“, - nicht aber wie im „Wissen der Schau“. (S.266)
- Unendliches der Form nach kann erkannt werden – Unendliches dem Stoff nach nicht, denn das würde bedeuten die Teile nacheinander zu erkennen, aber eine Vielheit ist auch als Einheit zu erkennen, auch für Christus.
- etwas kann auf eine Art endlich, auf eine andere Art unendlich sein, nur Gott ist tatsächlich und völlig unendlich, Christus kann erreichen, aber nicht begreifen.
„Die unendlichen Möglichkeiten dagegen, die in den Geschöpfen verborgen sind, kann sie [die Seele Christi] vollkommen erkennen; denn sie erfasst sie als Wesenheiten, und als solche sind sie endlich.“ (S.268)
- Unendlichkeit ist eine Eigenschaft des Dinges, unendlich heißt: es gibt nichts Größeres, aber auch die Teile eines Unendlichen können unendlich sein, z.B.: Länge oder Zahl
„ Es gibt nichts Größeres als das, was nach allen Weisen schlechthin unendlich ist. Bei dem aber, was bloß in einer Hinsicht unendlich ist, gilt das gleiche nur in dieser einen Hinsicht.“ (S.269)
- Daraus folgt, dass Christus Vieles erkennt, Gott aber noch mehr.

Cont.gent.lib.1,c.69: Wie Gott das Unendliche erkennt

(zitiert Thomas von Aquin, *Summa contra gentiles oder die Verteidigung der höchsten Wahrheiten*, übersetzt von Helmut Fahsel. Bd. 1.Fraumünster Verlag. Zürich 1942, S.333-340)

- Gott ist die Ursache aller Seinsdinge, daher erkennt er diese auch.
- Gottes Kraft ist unendlich und erstreckt sich auch auf Unendliches, Gott erkennt seine Kraft vollkommen d.h. auch in ihren Auswirkungen.
- Gott erkennt Unendliches aktual und potentiell.
- In allen Dingen, die erschaffen wurden und endlich sind, liegt ein Teil der Unendlichkeit Gottes, aber die Möglichkeiten, dass etwas nach dem Vorbild Gottes entsteht, sind noch nicht erschöpft.
- Gott erkennt mit seinem unendlichen Erkennen das Unendliche, weil sein Sein sein Erkennen ist.
- Es gibt unendlich viele Seinsdinge, aber das ist eine geringere Unendlichkeit als die

Unendlichkeit Gottes, daher erkennt Gott die Summe von unendlichen Seinsdingen.

- Gott erkennt durch seine Wesenheit unendlich Vieles.
- Gott besitzt geistige Vollkommenheit.
- Der Mensch erkennt unendlich Vieles der Potenz nach, daher muss Gott noch mehr und vollkommen erkennen.
- Das Unendliche kann nicht abgezählt werden, Gott erkennt alles zugleich und zwar das unendlich Viele genauso, wie das endlich Viele.
- Gott erkennt das Viele als eines, unabhängig davon, ob es unendlich oder endlich ist, denn Gottes Wissen hat keine Grenzen.
- Verstand des Menschen unterscheidet sich vom Verstand Gottes folgendermaßen:
 - Der menschliche Verstand ist endlich.
 - Der Mensch kann das unendlich Viele nicht als Eines erfassen.
 - Der Mensch müsste das Unendliche durch Zählen erkennen, weil er das Verschiedene nur durch verschiedene Erkenntnisbilder erkennt.
 - Gott erkennt, was existiert und was nicht existiert.
 - Gott erkennt das Unendliche nicht, insofern es unendlich ist, sondern insofern es in seinem Wesen ist.

Contra gentiles lib.2, cap.32-38

(vgl.: www.corpusthomicum.org, gelesen am 5.1.2010)

Definition der Ewigkeit der Welt nach Gott, der Schöpfung und der Sachlichkeit.

De aeternitate mundi

(vgl.: www.fordham.edu/halsall/basis/aquinas-eternity, gelesen am 5.1.2010)

Wenn die Welt einen zeitlichen Anfang gehabt hat, muss Gott immer existiert haben. Wenn es unmöglich ist, dass etwas durch ihn Geschaffenes immer existiert hat, dann entweder weil er so etwas nicht schaffen konnte, oder weil so etwas nicht möglich ist.

Wenn es unmöglich ist, dann entweder durch das Fehlen passiver Potentialität oder wegen eines Widerspruches der damit verbundenen Ideen.

Weder von Gott geschaffen zu sein und immer existiert zu haben, noch von Gott geschaffen zu sein und nicht einen zeitlichen Anfang gehabt zu haben ist widersprüchlich.

Entweder liegt die Ursache zeitlich vorher oder Nicht-Existenz liegt vor dem Zustandekommen.

Wenn Gott die Ursache ist, so muss diese nicht zeitlich voranliegen. Solche Ursachen können ihren Effekt sofort oder durch einen Bewegungsanstoß bewirken. Es gibt vor allem unsichtbare Dinge die entstehen und sofort wieder verlöschen, sie haben keine zeitlich vorhergehende Ursache wie die Bewegung.

Bei von Gott geschaffenen Dingen ist auch die Frage willentlich oder unwillentlich irrelevant.

In perfekter Form werden sowohl Form als auch Materie geschaffen, manchmal existieren Ursache und Form gleichzeitig, wie bei der Beleuchtung durch die Sonne. Das heißt wenn Gott existiert sind seine Auswirkungen sofort sichtbar ohne zeitliche Differenz.

Gott schafft also alle Dinge aus nichts und nach nichts.

Wenn die Welt immer existiert hätte, gäbe es eine unendlich große Anzahl unsterblicher Seelen. Sie würden den Körper verlassen haben, aber Gott kann eine unendlich große Zahl von Dingen erschaffen welche gleichzeitig existieren.

de ver. q.2, a.9

(vgl.: www.corpusthomicum.org, gelesen am 5.1.2010)

Kennt Gott das Unendliche? Was unendlich ist, kann nie enden. Deswegen kennt er es nicht (Augustinus).

Sententiis 1, dist.39, q.1, a.3

(vgl.: www.corpusthomicum.org, gelesen am 5.1.2010)

Die Weisheit besteht nicht aus Zahlen (Ps 146,5) also umfasst die Weisheit Unendliches.

Cantors Schlüsse aus den Argumenten Thomas von Aquins anhand der Briefe an die Theologen

Brief an Alexander BAUMGARTNER vom 27.12.1893 (vgl.: S. 264)

Wäre für Thomas von Aquin der Satz „*numerus actu infinitus repugnat*“ (die aktual unendliche Zahl ist widersprüchlich) unumstößlich fest gewesen, so würde er für ebenso evident die Wahrheit haben erklären müssen, dass die Welt einen zeitlichen Anfang hat. Wer also die Unmöglichkeit der actual unendlich großen Zahlen als eine sichere Wahrheit vertritt, der hat kein Recht sich auf die Autorität des hl. Thomas in dieser Sache zu berufen, der sie für durchaus problematisch hielt und sogar ausdrücklich den „Murmurantes“ zugerufen hat: „*Praeterea adhuc non est demonstratum, quod Deus non possit facere, ut sint infinita actu*“ (Und außerdem ist bis jetzt noch nicht bewiesen, dass Gott nicht machen könnte, dass es aktual Unendliches gibt) und weiters soll Thomas stets den Satz hochgehalten haben: „*mundum incepisse sola fide tenetur*“ (Dass die Welt angefangen hat, wird nur im Glauben festgehalten).

Brief an Ignace CARBONNELLE vom 28.11.1885 (zitiert nach S. 283)

„ich freue mich besonders, dass sie für die actual unendlichen Zahlen eintreten, obgleich unsere Differenz darin besteht, dass ich auch das Aktualunendliche in concreto, sive in natura naturante, mit derselben Entschiedenheit verteidige. Was die Frage nach dem Aktualunendlichen in „*Deo aeterno omnipotenti seu in natura naturante*“ (das Aktualunendliche im ewigen allmächtigen Gott oder in der erschaffenen Natur) betrifft bezweifle ich nicht, dass wir hier wieder hinsichtlich der Bejahung ganz einer Ansicht sind.“

Brief an Thomas ESSER, vom 5.12.1895 (vgl. S. 298 ff)

Cantor bekennt in einem Postskript zu einem Brief an Jeiler, dass er Essers Schrift über die Möglichkeit einer anfanglosen Welt nach Thomas für eines der besten Stücke neuscholastischer Literatur hält, und betont: „mit großem Interesse habe ich Ihre Schrift *Die Lehre des hl. Thomas über die Möglichkeit einer anfanglosen Schöpfung* studiert.“ (S.300). Cantor meint u.a. der klare Sinn seines Anspruches gegen die Murmurantes sei „Und außerdem ist bis jetzt noch nicht bewiesen, dass Gott nicht machen könnte, dass Unendliches nicht wirklich sei“. Außerdem erwähnt er das Werk von Joseph HONTHEIM, der von S. Thomas sagt: „*Non admisset possibilitatem creationis aeternae, si putavisset*

inde sequi numerum actu infinitum" (Er hätte die Möglichkeit einer ewigen Schöpfung nicht zugelassen, wenn er geglaubt hätte, dass daraus die aktual unendliche Zahl folgt).

Brief an Johann B. FRANZELIN vom 22.1.1886 (zitiert nach S. 322)

„Die Ausdrücke „Natura naturans“ und „Natura naturata“ gebrauche ich in derselben Bedeutung welche ihnen die Thomisten gegeben haben, so dass der erstere Ausdruck Gott, als den außerhalb, der aus nichts von ihm geschaffenen Substanzen stehenden Schöpfer und Erhalter derselben, der letztere Ausdruck dagegen die durch ihn geschaffene Welt bezeichnet und meiner festen Überzeugung nach die actual unendliche Zahl der geschaffenen Einzelwesen, sowohl im Weltall, wie auch schon auf unserer Erde und aller Wahrscheinlichkeit nach, selbst in jedem noch so kleinen ausgedehnten Teil des Raumes besteht, worin ich mit Leibniz ganz übereinstimme. Auch glaube ich, dass die Worte der hl. Schrift, wie z.B. „Omnia in pondere, numero et mensura disposuisti“ (Du aber hast alles nach Maß, Zahl und Gewicht geordnet), in denen ein Widerspruch gegen die actual unendlichen Zahlen vermutet wurde, diesen Sinn nicht haben. Die Ansichten aber, welche ich mir selbst im Laufe der Jahre gebildet, haben mich niemals von den Grundwahrheiten des Christentums entfernt, sondern eher darin noch befestigt. So sehe ich im Begriff des Transfinitum keine Gefahr für religiöse Wahrheiten. Gottes unendliche Vollkommenheit ist ebenso Freiheit als Allmacht, Weisheit, Gerechtigkeit etc. Wer die Notwendigkeit einer Schöpfung aus der Unendlichkeit der Güte und Herrlichkeit Gottes erschließt, der muss behaupten, dass alles Erschaffene wirklich von Ewigkeit erschaffen ist.“

„[...]in der kurzen Andeutung meines Briefes vom 22. ds. war es an der betreffenden Stelle nicht meine Meinung, von einer objektiven, metaphysischen Notwendigkeit zum Schöpfungsakt, welcher Gott, der *absolut Freie* unterworfen gewesen wäre, zu sprechen, sondern ich wollte nur auf eine gewisse subjektive Notwendigkeit *für uns* hinweisen, aus Gottes Allgüte und Herrlichkeit auf die tatsächlich *erfolgte* (nicht a parte Dei zu *erfolgende*) Schöpfung *nicht bloß* eines *finitum ordinatum*, sondern eines *Transfinitum ordinatum* zu schließen.“³⁷

Brief an Constantin GUTBERLET vom 23.1.1887 (zitiert nach S. 353)

„Johann B. Franzelin schreibt mir am 22.1.1886: ‚soweit ich bis jetzt sehe, liegt in Ihrem Begriffe des Transfinitum keine Gefahr für religiöse Wahrheiten und Ihr Schluss auf die Möglichkeit der Schöpfung (des Transfiniten) aus dem Begriffe von Gottes Allmacht ist ganz richtig‘“

Brief an Franx Xaver HEINER vom 31.12.1895 (vgl. S. 368)

Cantor verweist auf den Wiederabdruck aus dem Commerschen Jahrbuch für Philosophie und speculative Theologie und des Beitrages: „Die Lehre des hl. Thomas von Aquin über die Möglichkeit einer anfanglosen Schöpfung“, welche eine meisterhafte Exposition der

37 Das aktual Unendliche im Geschaffenen ist ein "noch Vermehrbares" im Gegensatz zum Absoluten. Pg 326

Das Transfinitum aktual ist ein Vermehrbares, die Vermehrbarkeit bis es nicht mehr vermehrbare wäre, widerspricht dem. pg 327. Allmacht bedeutet, dass alles Erschaffene von Ewigkeit erschaffen ist, es gibt vor Gottes Augen kein Mögliches, das seine Allmacht ins Dasein rufen könnte.

betreffenden Lehre des Aquinaten zugleich mit einer mustergültigen Polemik gegen die gerade heutigen Tages vielbetretenen Irrgänge in dieser Frage darstellt.

Brief an Carl Friedrich HEMAN vom 28.7.1887 (vgl. S. 377)

Cantor beruft sich auf Heman als Zeugen dafür, dass er schon 1887/1888 der Ansicht gewesen sei, der zeitliche Anfang der Welt lasse sich mit Vernunftgründen beweisen.

....und die Thomassche Doctrin „Mundum incepisse sola fide tenetur nec demonstrative probari posse“ (dass die Welt angefangen hat, wird nur im Glauben festgehalten, und es ist nicht möglich, dies durch einen Beweis zu begründen) wäre unmöglich, wenn der Aquinate den Satz „es gibt keine actual unendliche Zahlen“ für erwiesen gehalten hätte. Denn aus diesem Satz (wenn er wahr wäre) würde demonstrative mit größter Evidenz folgen, dass eine unendliche Zahl von Stunden vor diesem Augenblick verflossen sein könnte; Es würde also das Dogma vom Weltanfang (vor endlicher Zeit) nicht als bloßer Glaubenssatz haben verteidigt werden können und im

Brief an Carl HEMAN vom 21.6.1888 (zitiert nach S. 383)

beschreibt Cantor das Verhältnis der beiden Sätze:

- 4) „Die Welt hat samt der Zeit vor einem endlichen Zeitabschnitt angefangen oder was dasselbe sagt: die bisher verflossene Zeitdauer der Welt ist (mit dem Maß etwa einer Stunde gemessen) eine endliche (welcher wahr und christlicher Glaubenssatz ist) und
- 5) Es gibt keine actual unendlichen Zahlen (welcher falsch und heidnisch ist und daher kein christlicher Glaubenssatz sein kann.

Die Tatsache der actual unendlich-großen Zahlen ist so wenig Grund für die Möglichkeit einer a parte ante unendlichen Dauer der Welt, dass vielmehr mit Hilfe der Theorie der transfiniten Zahlen die Notwendigkeit eines von der Gegenwart in endlicher Ferne gelegenen Anfangs der Bewegung und Zeit bewiesen werden kann.“

Brief an Joseph HOTHEIM vom 21.12.1893 (zitiert nach S. 392)

„Von der These „Nulla creatura ab aeterno esse potest“ (Kein Geschöpf kann seit Ewigkeit existieren) halte ich nicht nur mit allen christlichen Philosophen den zeitlichen Anfang der Schöpfung aufrecht, ich behaupte auch mit Ihnen, dass die Wahrheit mit bloßen Vernunftgründen bewiesen werden kann. Die Statuierung actual unendlich großer, oder wie ich sie nenne, transfiniten Zahlen, hat nicht zur Folge, dass man auf den rationalen Beweis für den zeitlichen Weltanfang zu verzichten hat. Die Lehre vom Transfiniten ist weit davon entfernt, die Thomassche Doctrin in ihren Fundamenten zu erschüttern. Dagegen wird meine Lehre in gar nicht so ferner Zeit als eine geradezu vernichtende Waffe gegen allen Pantheismus, Positivismus und Materialismus sich erweisen! Thomas hat meiner Überzeugung nach den Satz „mundum incepisse sola fide tenetur nec demonstrative probari posse“ (Dass die Welt einen Anfang hatte, wird nur im Glauben festgehalten; und es ist nicht möglich, es durch einen Beweis zu wissen) hauptsächlich darum aufrecht gehalten, weil er die Ihnen bekannten Gründe gegen die Möglichkeit des „numerus infinitus“ (der unendlichen Zahl) nicht für absolut stringent, sondern nur für mehr oder weniger probabel hielt; zur Zeit von Thomas, wo die echte Lehre von den actual unendlichen großen oder

transfiniten Zahlen noch nicht ausgebildet war, er sie aber im Geiste gewissermaßen voraussah, dabei jedoch nicht übersehen konnte, welche Folgen sie für einen Beweis der Möglichkeit oder Unmöglichkeit einer Schöpfung von Ewigkeit her ergeben möchte, wollte er den zeitlichen Anfang der Schöpfung zu den Glaubensgeheimnissen gerechnet sehen, welche demonstrativ nicht oder vielmehr „bisher noch nicht (adhuc)“ bewiesen worden waren.“

Brief an Ignatius JEILER vom 20.5.1888 (zitiert nach S. 411 ff)

„Ich will nicht unerwähnt lassen, dass Bayle zu seiner im Wesentlichen richtigen Lehre manche Folgerungen zieht, die falsch sind; so z.B. die Sätze „Non repugnat a Deo simul produci omnia possibilis“ (Es stellt keinen Widerspruch dar, dass Gott gleichzeitig alles, was möglich ist, hervorgebracht hat) und „Rei creatae permanenti nullatenus repugnet infinita duratio a parte ante“ (Für ein dauerhaftes erschaffenes Ding stellt eine von der Vergangenheit aus gerechnete unendliche Dauer keinerlei Widerspruch dar).

Der Dominikaner DURANDUS de Sancto Prociano bringt gegen die actual unendliche Menge vor, was leicht zu widerlegen ist, nämlich fragt er: „Producta infinita multitudine, verbi gratia lapidum vel angelorum, possetne Deus producere alios Angelos?“ (Könnte Gott, nachdem er eine unendliche Menge z.B. von Steinen oder Engeln hervorgebracht hat, nicht noch andere Engel hervorbringen?) Gewiss kann Er dies, muss hier die Antwort sein. Wenn er daraus schließt: „ergo Angeli prius producti non erant infiniti“ (Also waren die zuerst hervorgebrachten Engel nicht unendlich viele), so ist dieser Schluss grundfalsch. Nur bei endlichen Mengen ändert sich die Form stets bei Vermehrung oder Verminderung der Elemente; es versteht sich dies aber auch hier nicht von selbst, sondern kann und muss bewiesen werden. Dennoch kann das Transfinites nicht als eine Unterabteilung dessen angesehen werden, was man gewöhnlich „potentielles Unendliches“ nennet. Denn es ist ein in Veränderung Begriffenes Endliches, das also in jedem seiner actualen Zustände eine endliche Größe hat; wie beispielsweise die vom Weltanfang verfllossene Zeitdauer, welche, wenn man sie auf irgend eine Zeiteinheit, z.B. ein Jahr, bezieht, in jedem Augenblick endlich ist, aber immerzu über alle endlichen Grenzen hinaus wächst, ohne jemals wirklich unendlich groß zu werden.“

II.2.3. Der „gemischte, mathematisch metaphysische Beweis“ für einen zeitlichen Weltanfang

Brief an Aloys SCHMID vom 26.3.1887 (zitiert nach S.489)

Cantor zitiert Argumente des Thomas von Aquin u.a. dass jede Menge, die in der Natur existiert geschaffen ist; und jedes Geschaffene unterliegt einer bestimmten Absicht des Schaffenden; denn kein Wirkender wirkt ziellos.

„Also ist es notwendig, dass alles Geschaffene unter eine bestimmte Zahl fällt. Daher kann es unmöglich eine actual unendliche Menge geben, auch nicht per accidens. Er zitiert weiter aus der Schrift „Les confins de la science et de la philosophie“ von Ignace Carbonelle, mit der dieser den Versuch gemacht hat, den Gerdilschen Beweis für den zeitlichen Weltanfang zu retten indem er den Satz verteidigt: „Die actual unendliche Zahl ist nicht absurd aber sie ist wesentlich unbestimmt“ Mit dem Nachsatz steht und fällt aber der von Carbonelle unternommene mathematische Beweis für den zeitlichen Anfang der Schöpfung; und

weitere gibt er Schmid recht, der mit Nicolaus von Cusa sagt, dass „in Gott Alles Gott ist“, wie auch dass die Erkenntnis Gottes objektiverseits das Incommensurable nicht als commensurabel, das Irrationale nicht als rational zu erkennen vermag, weil die göttliche Allerkennnis, wie die göttliche Allmacht nicht auf Unmögliches gehen kann“. Und weiter an Schmid: wenn hier gesagt wird, dass ein mathematischer Beweis für den zeitlichen Weltanfang nicht geführt werden könne, so liegt der Nachdruck auf dem Wort „mathematischer“ und nur soweit stimmt meine Ansicht mit der des Hl. Thomas überein. Als Philosoph tut man meines Erachtens überhaupt gut daran, sich in allen mathematisch-philosophischen Fragen mathematischen Autoritäten gegenüber möglichst skeptisch zu verhalten. (Es ist selten, dass die Geometer Scharfsinnige sind, und dass die Scharfsinnigen Geometer sind). In den Confessiones des Augustinus findet man im Buch 7, Kapitel 6, wie er die z.B. die astrologischen Zukunftsdeutungen verwirft.“

Und im Brief vom 5.8.1887 (zitiert nach S. 515 f)

„Mit der Annahme eines zeitlichen Weltanfangs stimme ich mit Ew. Hochwürden durchaus überein. Alle bisherigen Beweise für einen endlich entfernten Weltanfang begründen sich, soweit mir bekannt, auf die vermeintliche Unmöglichkeit der bestimmt-unendlichen Zahlen, also auf ein unhaltbares, die absolute Perfection des höchsten Seins bedrohendes Dogma gegen das Thomas in seinem opusculum de aeternitate mundi aufgetreten ist. Ich kann sagen, die Tatsache der act. unendl. großen Zahlen ist sowenig ein Grund für die Möglichkeit einer a parte ante unendlichen Dauer der Welt, dass vielmehr mit Hilfe der Theorie der transfiniten Zahlen die Notwendigkeit eines von der Gegenwart in endlicher Ferne gelegenen Anfangs der Bewegung und Zeit bewiesen werden kann.“³⁸

³⁸ T.v.Aquin bestreitet, dass ein zeitlicher Weltanfang anzunehmen ist „da es nicht bewiesen ist, dass Gott nicht machen könnte, dass es aktual Unendliches gibt“ (Opusculum de aeternitate mundi)
R P Carbonelle: zeitlicher Anfang der Schöpfung“ die aktual unendliche Zahl ist nicht absurd“ (die Grenzen der Wissenschaft und der Philosophie)
N.V.Cusa: „die göttliche Allmacht kann nicht auf Unmögliches gehen“
Gemischter mathematisch metaphysischer Beweis pg.503 ggs. Zu T.v. Aquin „allein durch den Glauben weis man, dass die Welt nicht immer gewesen ist, und es kann durch Beweis nicht geprüft werden“

III.3) Pantheismus?

Ausgearbeitet von: Nikola Mircetic, Regina Zikmund-Hochrath, Astrid Wölfel

III.3.1) Begriffserklärung

Der Pantheismus (gr. πᾶν „alles“ und θεός „Gott“) betrachtet alles Seiende, als göttlich bzw. von Gott durchdrungen; das Universum ist Gott selbst. Spinoza, um einen Vertreter zu nennen, stellt die Formel - Substanz *gleich* Gott *gleich* Natur - auf. Pantheismus ist keine Religion, da eine Personifizierung Gottes nicht gemacht wird. Ihm fehlen alle Merkmale einer Religion - Religionsbegründer, Religionsgemeinschaft, heilige Schriften, Dogmen, Rituale, Institutionen; er ist vielmehr eine Weltanschauung.

Das Wort stammt von John Tolands Pantheistikon (1705), einem irischen Philosophen.

Doch die Sache selbst geht zurück bis ins griechische Altertum, bei Xenophanes und Parmenides, auch bei Aristoteles; eine extreme Form des Pantheismus ist der Akosmismus (aus dem griechischen a=nichts, Kosmos=Weltordnung).

Akosmismus ist die Lehre der Weltlosigkeit, vorerst wurde er im Atheismusstreit nur polemisch verwendet, später greift ihn Hegel wieder auf, für die Lehre Spinozas, nach der Gott die einzige Wirklichkeit oder Substanz und die Welt nur ein Akzidenz (Zufall) ist. Fichte nannte sich selbst einen Akosmisten, da seine Philosophie „die Realität des Zeitlichen und Vergänglichen leugnet, um die des Ewigen und Unvergänglichen in seine ganze Würde einzusetzen“.

Unterscheidung Panentheismus: der Begriff lässt sich aus dem griechischen Herleiten: pan=all – en=in – theos=Gott ableiten, bezeichnet die All-in-Gott-Lehre. Nach dieser Lehre ruht und lebt alles in Gott. Mit dem Begriff Panentheismus sollten die Lehren von Schelling und Hegel u.a. vor dem Vorwurf des Pantheismus geschützt werden, denn die Lehre spricht nicht von der Gleichheit von Gott und dem All, sondern vom Enthaltensein von allem in Gott.

(vgl. Regenbogen/Meyer (Hrsg.): *Wörterbuch der philosophischen Begriffe*)

III.3.2) Geschichte der Geschwister Unendlichkeit und Pantheismus

Sowohl der Begriff des Unendlichen als auch der des Pantheismus sind durch die Geschichte geworden und wurden durch sie ge- und verformt. Beide haben ihren gemeinsamen Ursprung in dem Spruch des Anaximander, in dem es um das ἄπειρον, das Un-begrenzte, geht:

... ἐξ ὧν δὲ ἡ γένεσις ἐστὶ τοῖς οὕσι, καὶ τὴν φθορὰν εἰς ταῦτα γίνεσθαι κατὰ τὸ χρεών: διδόναι γὰρ αὐτὰ δίκην καὶ τίσιν ἀλλήλοις τῆς ἀδικίας κατὰ τὴν τοῦ χρόνου τάξιν.

„... woher die Dinge ihre Entstehung haben, dahin müssen sie zu Grunde gehen, nach der Notwendigkeit; denn sie müssen Buße zahlen und für die Ungerechtigkeiten gerichtet werden, gemäß der Ordnung der Zeit.“

Aus dem Unendlichen kommt alles und geht dorthin wieder zurück. Platon greift diese These des Unendlichen/Unbegrenzten auf und synthetisiert sie mit seiner Vorstellung des Göttlichen, die durchwegs pantheistisch geprägt war. Hier wird die Idee des „*pantheistisch*“ *aktual Unendlichen* geboren, die besagt, dass die Welt immer war und auf ewig sein wird; die (göttliche) Welt west aus dem Unendlichen hin ins Unendliche. Aristoteles, der „Widersacher Platons“, verwirft dieses Ewigkeitsprinzip der platonischen Welt und führt das Prinzip des *potentiell Unendlichen* ein, welches besagt, dass die Welt, da wir sie wahrnehmen können, *potentiell unendlich* ist, d.h. er sieht die sinnliche Welt als eine Menge an, der man unendlich viele „Teile“ hinzufügen könnte, doch als eine Menge ist sie nie unendlich; dass es eine unendliche Menge gäbe sei unmöglich.

Die Annahme des *potentiell Unendlichen* hat den weit größeren Anklang in der abendländischen Geschichte genommen und hielt sich bis ins späte Mittelalter. Für die christliche Kirche war dieses Prinzip oftmals ein Beweis für die Existenz Gottes (siehe z.B. Thomas von Aquin), doch mit einer bekannten Ausnahme: Augustinus folgte dem Platonismus und sah im *aktual Unendlichen* Gott. Aufgrund der Mathematik haben sich dann viele Gelehrte bemüht gefühlt Beweise für die eine als auch die andere Theorie zu bringen. Deren Anzahl sind viele, doch es sei mit wenigen Worten einer erwähnt.

Die wirklichen Einheit und der Unendlichkeit der Zahlen aus pantheistischer Sicht: die wirkliche Einheit zeige sich in den Stufen der endlosen Zahlen, denn Zahlen seien die Wiederholung der wirklichen Einheit. So sei die Zahl zwei die Wiederholung von eins, und ebenso sei es mit den anderen Zahlen.

III.3.3) Georg Cantor und der Pantheismus

Georg Cantor, ein Mathematiker, stellte sich dem Problem des Unendlichen nicht nur aus seiner fachmännischen Perspektive, sondern suchte fleißigst mit etlichen kirchlichen Würdenträgern das Gespräch, um eine Aussöhnung zwischen christlichem Gottesglauben und der hehren Wissenschaft zu finden. Seine Theorie, dass das *potentiell Unendliche* auf *aktual Unendlichem* basiert, sei in keinem Widerspruch zu der Lehre des heiligen Thomas. Um dem Nachdruck zu verleihen, konnte er nicht umhin einige lästernde Worte über den Pantheismus auszusprechen.

Joseph Hontheim, einem Priester aus Olevig bei Trier, schrieb er, dass sich seine Lehre (Mengenlehre), als eine „geradezu vernichtende Waffe gegen allen Pantheismus, Positivismus und Materialismus erweisen wird.“ (*Kardinalität und Kardinäle (K. u. K.)*, CantHong3, S. 391). Dem Kardinal Johann B. Franzelin schrieb er ehrerbietigst, dass seine Theorie vom *Transfiniten* absolut „ungefährlich“ für den Glauben der Kirche sei und suchte den „Pantheismusverdacht“ zu widerlegen. In weiteren Briefen pochte er auf diese „Unbedenklichkeitsbescheinigung“, unter anderem an Constantin Gutberlet (*K. u. K.*, CanGut87b, S. 352) und Alois Schmid (*K. u. K.*, CanSch87a, S. 498).

„Eine andere häufige Verwechslung geschieht mit den beiden Formen des aktuellen Unendlichen, indem nämlich das Transfinite mit dem Absoluten vermengt wird, während doch diese Begriffe streng geschieden sind, insofern ersteres ein zwar Unendliches, aber doch noch

Vermehrbares, das letztere aber wesentlich als unvermehrbar und daher mathematisch undeterminierbar zu denken ist; diesem Fehler begegnen wir z.B. im Pantheismus, und er bildet die Achillesferse der Ethik Spinozas..." (Cantor, „Über die verschiedenen Standpunkte in bezug auf das aktuelle Unendliche“, 375)

Cantor wendet sich auch gegen das pantheistische Denken Hegels, in dem es keine Unterschiede im Akutal-Unendlichen gibt, während Cantor es als sein Verdienst ansieht, die darin bestehenden Unterschiede scharf hervorgehoben zu haben (vgl. Cantor, ebd.).

IV) Literatur

IV.1) Cantor

Cantors Schriften sind zitiert unter Angabe des Jahres oder des Titels, und aus folgenden Texten (den *Gesammelten Abhandlungen*, wenn nicht anders angegeben).

Cantor, Georg, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, hg. von Zermelo, Ernst, Berlin, Springer (1932)

Cantor, Georg, „Notiz zu dem Aufsätze: Beweis, dass eine für jeden reellen Werth von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Function $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen lässt.“, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 73 (1871), S. 294-296

Cantor, Georg, „Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie des trigonometrischen Reihen“ *Mathematische Annalen* 5 (1872), S. 123 – 132

Cantor, Georg, „Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen“ *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 77 (1874), S. 258-262

Cantor, Georg, „Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre“, 1878

Cantor, Georg: „Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre“, (1883) In: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, S. 165-208
Online [Zugriff: 16.12.2009]: <http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/>

Cantor, Georg, „Die Grundlagen der Arithmetik, Rezension der Schrift von G. Frege“, 1885

Cantor, Georg: „Über die verschiedenen Standpunkte in bezug auf das actuale Unendliche“, (1886) In: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, S. 370-377
Online [Zugriff: 16.12.2009]:
<http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PPN=PPN237853094&DMDID=dmdlog59>

Cantor, Georg, „Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten“ 1887. In: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, S.378-439.

Cantor, Georg, „Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre“, 1890

Cantor, Georg: „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre“ In: *Mathematische Annalen* 46 (1895), S. 481-512
Online [Zugriff: 17.1.2010]:
<http://gdz.sub.uni-goettingen.de/ru/dms/load/img/>

Cantor, Georg, „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre“. (Zweiter Artikel.), *Mathematische Annalen* 49 (1897), S. 207

Cantors Briefe sind zitiert nach:

Christian Tapp: *Kardinalität und Kardinäle. Wissenschaftshistorische Aufarbeitung der Korrespondenz zwischen Georg Cantor und katholischen Theologen seiner Zeit.* Stuttgart: Steiner, 2005.

Weiters sind genannt:

Cantor an Dedekind, Brief vom 28. Juli 1899

Cantor an Dedekind, Brief vom 31. Aug. 1899

IV.I) Andere Literatur

Aristoteles: *Physik*, übersetzt und mit Anmerkungen begleitet von C. H. Weiße, Leipzig: Johann Ambrosius Barth, 1829

Insbesondere: Buch 3, Kapitel 4, S. 58-61

Buch 3, Kapitel 5, S. 61-67

Buch 3, Kapitel 6, S. 67-71

Online [Zugriff 7.1.2010]:

<http://www.zeno.org/Philosophie/M/Aristoteles/Physik/3.+Buch/4.+Capitel>

Aristoteles, *Physika*, in: W.D. Ross (Hsg.): *The Works of Aristotle* übersetzt von R.P. Harchie und R.K. Gaye; Oxford Clarendon Press 1930 [FB Philosophie: 9283/2].

Aristoteles, *Über den Himmel vom Werden und Vergehen.* Hrsg. und übersetzt von Gohlke Paul; Ferdinand Schöningh Paderborn: 1958 [FB Philosophie: H 1370/IV, 2 Ex. B].

Carbonelle, Ignace SJ: *Les confins de la science et de la Philosophie*, Paris 1881. (Aufsatzsammlung in 2 Bänden = Wiederabdruck der zehnteiligen Aufsatzreihe "L'aveuglement scientifique" ab 1877).

<http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k5478877p.r=carbonnelle.langEN> (Band 1)

<http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k54800072.r=carbonnelle.langEN> (Band 2)

Cohn, Jonas: *Geschichte des Unendlichkeitsproblems im abendländischen Denken bis Kant*, 1896. Unveränderter fotomechanischer Nachdruck; Georg Olms Verlagsbuchhandlung Hildesheim 1960 [UB Wien: I-850269].

Fontenelle, Bernhard le Bovier de: *Éléments de la Géométrie de l'infini*, Paris 1727. In: *Œuvres complètes*, Band VIII; Fayard Paris 2000 [UB Wien: I-1371639/8].

Gerdil, Kardinal Hyacinthe Sigismond (Giacinto Sigismondo): *Opere edite ed inedite*, Rom 1806.

http://bvbm1.bib-bvb.de/webclient/DeliveryManager?pid=602234&custom_att_2=simple_viewer
(Band IV)

http://bvbm1.bib-bvb.de/webclient/DeliveryManager?pid=602260&custom_att_2=simple_viewer
(Band V)

Pesch, Tilmann: *Die großen Welträthsel. Philosophie der Natur*, (2 Bände). Erster Band. Philosophische Naturerklärung; Freiburg in Brusgen 1907 (3. verb. Auflage) Berlin, Karlsruhe, München, et al. [UB Wien].

Regenbogen, Armin/Meyer, Uwe (Hrsg.): *Wörterbuch der philosophischen Begriffe*. Hamburg: Felix Meiner 2005.

Reichhalter, Markus: *Grundzüge der Entwicklung der Mengenlehre von Cantor bis Zermelo*, Dipl. Innsbruck (2008)

Thomas von Aquin, *Summa theologica*, übersetzt von Dominikanern und Benediktinern Deutschlands und Österreichs. Bd. 1. Verlag Anton Pustet. Salzburg und Leipzig 1934

Thomas von Aquin, *Summa contra gentiles oder die Verteidigung der höchsten Wahrheiten*, übersetzt von Helmut Fahsel. Bd. 1. Fraumünster Verlag. Zürich 1942