Der Briefwechsel zwischen Frege und Hilbert – Kommentar aus der Perspektive der Philosophie Sartres

Alfred Dandyk

Problemstellung

Der Briefwechsel zwischen Frege und Hilbert zu Grundlagenfragen der Mathematik gibt einen interessanten Einblick in das Denken von zwei führenden Mathematikern des 20. Jahrhunderts. Es geht in dieser Korrespondenz vor allem um die Bedeutung und die Funktion von Grundelementen der Mathematik. Was ist eine Definition? Was ist ein Axiom? In welchem Verhältnis steht im Rahmen der Mathematik das Axiom zur Definition? „Worauf beruht die Wahrheit der Axiome?“, ist eine weitere Frage, die bei diesem Gedankenaustausch erörtert wird.

Es zeigte sich im Laufe der Korrespondenz, dass die Ansichten der beiden Mathematiker zu diesen Fragen erheblich differieren, so dass Hilbert, wahrscheinlich auch aus Arbeitsüberlastung, die Diskussion einstellte, obwohl Frege sie offensichtlich gerne fortgesetzt hätte. Hilbert hat dem Wunsch Freges nach Veröffentlichung der Briefe nicht entsprochen, aber auf irgendeine Weise hat der Gedankenaustausch dann doch das Licht der Öffentlichkeit erblickt. (Felix Meiner Verlag, Gottlob Freges Briefwechsel, 1980)

Die Ansicht darüber, wer von den beiden Gelehrten recht hat und wer nicht, ist geteilt. Ein Kommentator namens Heinrich Scholz schreibt:

> *…heute zweifelt niemand daran, dass Frege, der selbst auf dem Boden des klassischen Wissenschaftsbegriffes so grundlegend Neues geschaffen hat, die radikale Hilbertsche Umwälzung dieses Wissenschaftsbegriffes nicht mehr zu erfassen vermocht hat, so dass seine an sich recht scharfsinnigen und heute noch lesenswerten kritischen Bemerkungen im wesentlichen als gegenstandslos bezeichnet werden müssen. (S. 2)*

Andererseits kann man auch folgende Bemerkung finden:

> *Anerkennung und ausführliche systematische Würdigung hat Freges kritische Leistung gegenüber der axiomatischen Methode Hilberts jedoch zunehmend in der einschlägigen Frege-Forschung gefunden, z.B. bei Dummett, Gabriel, von Kutschera und Resnik. (S. 2)*

Demnach streiten sich die Gelehrten, ob Hilbert oder Frege der Vorzug zu geben ist und somit taucht die Frage auf, worin dieser Streit eigentlich begründet ist. Frege und Hilbert sind sicherlich sehr kompetente Mathematiker. Es kann also nicht an einem Mangel an Fachkompetenz liegen. Auch die divergierenden Ansichten der Kommentatoren beruhen sicher nicht auf einem Mangel an Einsicht. Sehr viel wahrscheinlicher ist, dass diesem Streit eine jeweils unterschiedliche *Wahl* zugrundliegt, eine Wahl hinsichtlich der Frage, aus welcher Perspektive man die Mathematik betrachten möchte, was einem an diesem komplexen Phänomen namens ‚Mathematik' wichtig und was nicht so wichtig ist.

Mit dem Begriff der *Wahl* ist die Beziehung dieses Streites zwischen Frege und Hilbert und dem Existentialismus Sartres hergestellt. Offensichtlich spielt dieser Grundbegriff der Philosophie Sartres, die Wahl, auch in den Wissenschaften eine bedeutende Rolle.

So lässt sich auch die ambivalente Haltung Hilberts gegenüber Frege erklären. Hilbert ist bereit, die Qualität der Überlegungen Freges anzuerkennen und sogar zuzugestehen, dass er noch einmal in Ruhe über alles nachdenken müsse. So schreibt Hilbert an Frege:

> *Leider ist es mir bei der augenblicklichen Überbürdung mit Arbeiten aller Art nicht möglich Ihren Brief eingehend zu beantworten. Ihre Ausführungen sind mir von vielem Interesse und großem Werth. Sie werden mich jedenfalls zu einem genaueren Nachdenken und zu einer sorgfältigen Formulirung meiner Gedanken anregen. (S. 20)*

Es ist deutlich zu erkennen, dass Hilbert die Gedanken Freges wertschätzt und dass er weit davon entfernt ist, diese Überlegungen schlicht und einfach für falsch zu halten. Es ist etwas anderes, was ihn davon abhält, sie zu übernehmen. Es ist Hilberts Sichtweise auf die Mathematik, die ihn zum Skeptiker hinsichtlich der Vorstellungen Freges macht.

In diesem Aufsatz soll nur ein bestimmter Aspekt der Diskussion untersucht werden: Das Verhältnis zwischen einer Definition und einem Axiom im Rahmen der Mathematik, vorzüglich der Geometrie, aber auch in anderen Gebieten.

Freges Position

Freges Kritik an Hilbert entzündet sich an der Frage des Verhältnisses einer Definition zu einem Axiom. Er beklagt sich über Hilbert, weil dieser die Trennlinie zwischen diesen beiden Begriffen nicht deutlich genug ziehe, so dass das Resultat Chaos und Verwirrung sei:

> *Man ist aber auch im Unklaren darüber, was sie Punkt nennen. Zunächst denkt man an die Punkte im Sinne der euklidischen Geometrie, worin man bestärkt wird durch den Satz, dass die Axiome Grundtatsachen unserer Anschauung ausdrücken. Nachher aber denken sie sich ein Paar Zahlen als einen Punkt. Bedenklich sind mir die Sätze, dass die genaue und vollständige Beschreibung von Beziehungen durch die Axiome der Geometrie erfolge, und dass Axiome den Begriff „zwischen" definieren. Damit wird etwas den Axiomen aufgebürdet, was Sache der Definitionen ist. Damit scheinen mir die Grenzen zwischen Definitionen und Axiomen in bedenklicher Weise verwischt zu werden und neben der alten Bedeutung des Wortes „Axiom"…ein andere, aber mir nicht recht fassbare, aufzutauchen. (S. 7/8)*

Der Unterschied zwischen einer Definition und einem Axiom ist für Frege wichtig, weil für ihn durch eine Definition ein Sachverhalt *festgelegt* wird. Dieser Sachverhalt ist dann wahr, und zwar *per definitionem*. Andere Begriffe und die ihnen entsprechenden Sachverhalte, wie zum Beispiel Axiome, Grundsätze und Lehrsätze, sind nicht per definitionem wahr, sondern aus anderen Gründen. Ein Axiom der Geometrie zum Beispiel ist Frege zufolge wahr, weil seine Wahrheit in der Anschauung begründet ist. Die Wahrheit der Lehrsätze hingegen muss durch Beweise demonstriert werden. So sieht nach Frege der korrekte Aufbau einer mathematischen Theorie aus und er fordert, dass die Mathematiker sich daran halten sollten, weil andernfalls Chaos und Verwirrung drohe.

Hilberts Antwort

Hilbert weist die Kritik Freges zurück. Seine Gründe dafür sind jedoch komplex und nicht darauf zu reduzieren, dass er Freges Ansichten für unberechtigt hält. Er scheint Freges Vorstellungen für korrekt zu halten, sieht in ihnen aber eine einseitige und beschränkte Perspektive auf die Mathematik. Selbstverständlich ist Freges Anliegen nach Klarheit und Eindeutigkeit der Begriffsbildungen zu unterstützen, aber nicht um jeden Preis, zum Beispiel nicht um den Preis der Problemlösungskompetenz. Hilbert schreibt an Frege:

> *Wenn wir uns verstehen wollen, dürfen wir nicht die Verschiedenartigkeit der Absichten, die uns leiten, vergessen. Ich bin zu der Aufstellung meines Systems von Axiomen durch die Not gezwungen: ich wollte die Möglichkeit zum Verständnis derjenigen geometrischen Sätze geben, die ich für die wichtigsten Ergebnisse der geometrischen Forschungen halte: dass das Parallelenaxiom keine Folge der übrigen Axiome ist…Ich wollte die Frage beantworten, ob der Satz, dass in zwei gleichen Rechtecken mit gleicher Grundlinie auch die Seiten gleich sind, bewiesen werden kann, oder vielmehr wie bei Euklid ein neues Postulat ist. (S. 11)*

Hilbert bringt ein Argument zum Vorschein, das Frege gar nicht auf seinem Schirm hatte: Die Frage nach dem *Zweck* der mathematischen Forschung. Und an dieser Stelle werden zwei weitere Begriffe sichtbar, die für die Philosophie Sartres wichtig sind: der *Entwurf* und das *Individuum*. Die Forschung des Mathematikers beruht auf der Verinnerlichung des objektiv Vorgegebenen und auf einem individuellen Entwurf des zu erreichenden Zieles.

Hilbert betont jedoch auch den Erfolg, den seine Sichtweise für die Mathematik hervorgebracht hat:

> *Dass mein System von Axiomen solche Fragen in ganz bestimmter Weise zu beantworten gestattet und dass man auf viele dieser Fragen sehr überraschende und sogar ganz unerwartete Antworten erhält, lehrt, glaube ich, meine Festschrift…Dies also ist meine Hauptabsicht. (S. 11)*

Folgendes ist deutlich zu erkennen: Hilbert ist der Ansicht, dass die Axiomatisierung der Mathematik nicht dogmatisch und diktatorisch erfolgen sollte. Klarheit, Eindeutigkeit und Sicherheit sind wichtige Kriterien, es sind aber nicht die einzigen Kriterien. Letzten Endes zeigt sich die Adäquatheit eines Axiomen-Systems in seiner Problemlösungskompetenz und es obliegt der *Freiheit* des Forschers, die Adäquatheit des Axiomen-Systems in Abhängigkeit von der Problemlage zu eruieren. Hilbert sagt demnach im Grunde zu Frege: Ihre logischen Bemühungen in Ehren, aber nehmen sie mir bitte nicht meine Freiheit, in meinem Sinne zu denken und zu forschen.

Dabei weist Hilbert auch auf den Unterschied zwischen der kreativen Freiheit des Forschers und einer willkürlichen Freiheit hin. Die kreative Freiheit besteht darin, dass der Forscher auf der Basis des Vorgegebenen eine gekonnte Frage stellt und dann versucht, eine Antwort auf diese Frage zu finden. Bei Hilbert lautet die Frage, ob das Postulat Euklids über die gleichen Rechtecke bewiesen werden kann, seine Antwort besteht darin, dass er ein neues Axiomen-System aufstellt, dessen Adäquatheit in seinem Erfolg hinsichtlich des gestellten Problems gründet und nicht in einer vorgegebenen anschaulichen Wahrheit dieser Axiome. Die Wahrheit der Axiome wird vielmehr über deren Widerspruchsfreiheit gesichert.

Wichtig ist demnach der Zusammenhang des *gesamten Systems* und nicht die einzelnen Elemente dieses Systems. Wie man diese einzelnen Elemente benennt, ob Axiom oder Erklärung, ist für Hilbert von nachrangiger Bedeutung:

> *Wollen Sie meine Axiome lieber Merkmale der in den „Erklärungen" gesetzten und dadurch vorhandenen Begriffe nennen, so würde ich dagegen gar nichts einzuwenden haben, ausser etwa, dass das der Gewohnheit der Mathematiker und Physiker widerspricht. (S. 12)*

Hilbert besteht demnach darauf, dass die Arbeit des kreativen Mathematikers einer Art Schwebezustand zwischen Freiheit und Notwendigkeit entspricht. Der Mathematiker ist von lauter Notwendigkeiten umgeben, er muss aber dafür sorgen, dass er genügend Freiheit besitzt, mit diesen Notwendigkeiten umzugehen. Die Notwendigkeiten dürfen nicht zu einer Zwangsjacke werden, die ihm jeden Bewegungsspielraum nehmen. Insbesondere sollte man einen Begriffs-Fetischismus vermeiden. Im Vordergrund müssen immer die eigentlichen Probleme stehen, nicht die Begriffe:

> *Meine Meinung ist eben die, dass ein Begriff nur durch seine Beziehungen zu anderen Begriffen logisch festgelegt werden kann. Diese Beziehungen, in bestimmten Aussagen formuliert, nenne ich Axiome und komme so dazu, dass die Axiome…die Definitionen der Begriffe sind. Diese Auffassung habe ich mir nicht etwa zur Kurzweil ausgedacht, sondern ich sah mich zu derselben gedrängt durch die Forderung der Strenge beim logischen Schließen und beim logischen Aufbau einer Theorie. Ich bin zu der Überzeugung gekommen, dass man in der Mathematik und den Naturwissenschaften subtilere Dinge nur so mit Sicherheit behandeln kann, andernfalls sich bloß im Kreise dreht. (S. 23)*

Wenn man also ein Axiomen-System bewerten möchte, dann genügt es nicht, für die exakte Unterscheidung der einzelnen Elemente, wie Definition und Axiom, zu sorgen, sondern man muss das Zusammenspiel des gesamten Systems im Auge haben und es mit Hinsicht auf seine Problemlösungskompetenz beurteilen. Selbst wenn es Frege gelingen sollte, ein Axiomen-System in seinem Sinne aufzustellen, wird er sich am Ende bloß im Kreise drehen. Denn Hilbert glaubt, dass nur seine Methode aus dem mathematischen Glasperlenspiel eine fruchtbare wissenschaftliche Veranstaltung macht, die in der Lage ist, auch subtilere Probleme zu lösen.

Mit anderen Worten: Hilbert ist der Auffassung, dass die Grundlagen der Mathematik nicht in Stein gemeißelt sind, sondern sich der jeweiligen mathematischen Epoche mit ihren speziellen Problemlagen anpassen sollten. Das kann sogar so weit gehen, dass über die Bedeutung des Wortes ‚Axiom' neu befunden werden muss. Es wäre demnach einseitig, in der Mathematik ein System zu sehen, das wie ein Turm aus Legobausteinen zusammengesetzt ist, mit den Axiomen ganz unten und den Lehrsätzen ganz oben. Es ist vielmehr eine Art Kreislauf, in dem die Lehrsätze von den Axiomen abhängen und die Axiome von den Lehrsätzen.

Die moderne Mathematik bestätigt diesen Standpunkt. Die Hilbert-Raum Theorie zum Beispiel ist ein Axiomen-System, bei dem die Lehrsätze aus diesen Axiomen deduziert werden können. Die Axiome selbst aber beruhen nicht auf irgendeiner anschaulichen Wahrheit, sondern sie sind das Resultat der mathematischen Forschung, bei der viele der Lehrsätze vor den Axiomen bekannt waren. Folglich muss es möglich sein, das Axiomen-System den Lehrsätzen anzupassen.

Kommentar zur Kontroverse Frege versus Hilbert aus der Sicht der Philosophie Sartres

Offensichtlich verfolgen Frege und Hilbert unterschiedliche Pläne mit ihren jeweiligen Forschungen, und Hilbert weist darauf hin, dass sein Plan ein anderer ist als derjenige Freges. Von daher wird verständlich, dass Frege bestimmte Aspekte für besonders wichtig hält, während Hilbert andere Aspekte in den Vordergrund stellt.

Hilbert macht klar, dass der Begriff ‚die Mathematik' in Anführungszeichen gesetzt werden muss. Es ist zwar sinnvoll, von ‚der Mathematik' zu sprechen, denn die Mathematik existiert als objektives Faktum. Sie existiert zum Beispiel als Schulfach oder als Abteilung akademischer Fakultäten. Es gibt Mathematik-Lehrer und Mathematik-Professoren. Es ist auch sinnvoll von einem ‚Mathematiker' im Sinne einer Berufsbezeichnung zu sprechen.

Das ändert aber nichts an der Tatsache, dass der *forschende* Mathematiker das objektiv vorgegebene äußere Faktum ‚Mathematik' verinnerlichen muss, dass er diesem äußerlichen Faktum eine subjektive Färbung hinsichtlich der Vordergrund-Hintergrund-Strukturierung geben muss, damit er als *Individuum* in der Lage ist, sich kreativ mit den Sachverhalten auseinanderzusetzen.

Mit anderen Worten: Der *kreative* Mathematiker ist gezwungen, sich kritisch mit dem Vorgegebenen zu beschäftigen und die überlieferten Konzepte hinsichtlich ihrer Problemlösungskompetenz zu überprüfen. In diesem Prozess muss es möglich sein, vorgegebene Schemata zu verändern, zum Beispiel die Bedeutung des Wortes ‚Axiom' dem vorliegenden Problem anzupassen.

Damit kommt ein weiterer Begriff der Philosophie Sartres zum Vorschein: die Freiheit. *Der Mensch ist zur Freiheit verurteilt*, lautet ein berühmter Slogan des Existentialismus. Für Sartre ist der Mensch Freiheit. Konsequenterweise muss die Freiheit hinsichtlich *aller* Aspekte des In-der-Welt-Seins relevant sein, und zwar einfach auf Grund der Tatsache, dass es *Menschen* sind, die dieses In-der-Welt-Sein erleben. Mit anderen Worten: Auch der Forscher sollte die Strukturen der menschlichen Existenz nicht übersehen.

Es gibt einen Mathematiker, der die Bedeutung der Freiheit für die Mathematik besonders betont hat: Georg Cantor. Im Sinne Sartres ist in diesem Zusammenhang interessant, dass Cantor seine transfiniten Zahlen mit der Bemerkung verteidigt hat, das eigentliche Wesen der Mathematik liege in der Freiheit. Gegner Cantors, zum Beispiel sein Lehrer Kronecker, konterten mit der Bemerkung, das Wesen der Mathematik liege nicht in der Freiheit, sondern in der Wahrheit. Im Sinne Sartres müsste man formulieren:

> *Die Grundlage der Wahrheit ist die Freiheit. (Sartre, Wahrheit und Existenz)*

Hilbert hat in dem Streit Cantor versus Kronecker scharf gegen Kronecker argumentiert:

> *Kronecker prägte den Wahlspruch: Die ganze Zahl schuf der liebe Gott, alles andere ist Menschenwerk. Demgemäß verpönte er – der klassische Verbotsdiktator -, was ihm nicht ganze Zahl war, andererseits lag es ihm und seiner Schule deshalb auch fern, über die ganze Zahl selbst weiter nachzudenken. (Büttemeyer, Philosophie der Mathematik, Karl Alber, S. 116)*

Es ist leicht zu erkennen, dass der Streit Frege versus Hilbert die Auseinandersetzung zwischen Cantor und Kronecker widerspiegelt. Insbesondere der Ausdruck ‚Verbotsdiktator' trifft sowohl auf Kronecker als auch auf Frege zu.

Grundlegend ist die Frage nach dem ‚Wesen der Mathematik'. Stehen bei der Mathematik Gewissheit, Sicherheit und Klarheit der Grundlagen im Vordergrund oder sollte man einen pragmatischen Weg verfolgen, mit dem Ziel, maximale Problemlösungskompetenz zu erreichen, selbst um den Preis einer schwankenden Grundlage der Mathematik?

Dabei geht es selbstverständlich nicht darum, den Wert einer sicheren Grundlage der Mathematik anzuzweifeln, sondern darum, diesen Wert in Relation zu anderen Werten zu setzen, zum Beispiel zu dem Wert der Problemlösungskompetenz. Die entsprechende Entscheidung ist situativ zu treffen und kann von Epoche zu Epoche variieren.

Es kann also sein, dass in einer bestimmten Epoche die Problemlösungskompetenz im Vordergrund steht und in einer anderen Epoche die Grundlagenfrage dominiert. Zur Zeit der großen kreativen Mathematiker – Newton, Leibniz, Euler, Cauchy – ging es eher um die Entwicklung neuer Konzepte auf schwankender Grundlage. Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung verlangte anfänglich, die logischen Grundlagen der Mathematik nicht allzu wichtig zu nehmen. Diese Art der Mathematik wurde genau aus diesem Grunde von Zeitgenossen, zum Beispiel von Berkeley, heftig kritisiert.

In der Epoche der Aufklärer – Weierstraß, Dedekind – beschäftigte man sich eher mit der Klärung der Mathematik hinsichtlich ihrer Grundbegriffe, indem man versuchte, die schwankende Grundlage der Analysis und der Zahlentheorie durch ein festes logisches Fundament abzustützen. Aber selbst in dieser Epoche gab es Streit, hinsichtlich der Priorität von Sicherheit und Freiheit innerhalb der Mathematik.

Welcher Gesichtspunkt in einer bestimmten Epoche zu bevorzugen ist, diese Frage ist nur mit Hilfe eines Lebensentwurfes zu entscheiden. Denn es ist ausgeschlossen, darauf zu hoffen, sich als Mensch in ein objektives Weltauge verwandeln zu können, um dann aus einer gottgleichen Position per Einsicht in die göttliche Wahrheit *für die Ewigkeit* festzustellen, was in der Mathematik richtig und wichtig ist. Notwendig ist vielmehr ein Lebensentwurf, der die Entscheidung herbeiführen muss.

Mathematik: Concept oder Notion?

Darin ist wohl die Schwäche der Sichtweise Freges zu erkennen: Er will die Basis der Mathematik für alle Mathematiker und für die Ewigkeit zementieren, und genau das ist unmöglich, und zwar wegen der Strukturen der menschlichen Existenz. Frege scheint in der logischen Grundlage der Mathematik eine unangreifbare Festung sehen zu wollen, etwa nach dem Motto Martin Luthers:

Ein feste Burg ist unser Gott,
ein gute Wehr und Waffen.

Die Basis dieser festen Burg sieht er hinsichtlich der Geometrie in der Anschauung und der korrekten Anwendung der Elementarbegriffe der Mathematik: Axiom, Definition, Erklärung, Lehrsatz. Hinsichtlich der Zahlenlehre hält er sein Konzept des *Begriffsumfanges* für maßgebend. Hilbert steht dieser Sichtweise ablehnend gegenüber:

> *Frege hat die Begründung der Zahlenlehre auf reine Logik, Dedekind auf Mengenlehre als ein Kapitel der reinen Logik versucht: beide haben ihr Ziel nicht erreicht. Frege hat die gewohnten Begriffsbildungen der Logik in ihrer Anwendung auf Mathematik nicht vorsichtig genug gehandhabt: so hielt er den Umfang eines Begriffs für etwas ohne Weiteres Gegebenes derart, dass er dann diese Umfänge uneingeschränkt wieder als Dinge selbst nehmen zu dürfen glaubte. Er verfiel so gewissenmaßen einem extremen Begriffsrealismus. (Büttemeyer, S. 137)*

Es gehört zu den Merkwürdigkeiten der Mathematik-Geschichte, dass gerade Frege, der große Logiker, der so viel Wert auf die Exaktheit der Begriffsbildungen legte, ein selbstwidersprüchliches System konstruiert hat, was Bertrand Russell mit der von ihm entdeckten Antinomie der Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten, nachgewiesen hat. Der obige Text Hilberts ist eine Anspielung auf dieses Missgeschick Freges.

Hilbert scheint demgegenüber sagen zu wollen, dass sich die Grundlagen der Mathematik den jeweiligen Problemlagen anpassen müssen, wobei ein extremer Begriffs-Realismus vermieden werden sollte. Mit anderen Worten: Die Bedeutung der Wörter ‚Axiom' und ‚Definition' ist zwar ein wichtiges Problem, aber dieses Problem sollte stets in Abhängigkeit von der jeweiligen Problemlage gelöst werden. Das heißt, für Hilbert steht die mathematische *Praxis* stets im Vordergrund und die Begriffsbildungen sind in Abhängigkeit von dieser Praxis zu beurteilen.

Im Grunde genommen muss alles auf den Prüfstand gestellt werden: Selbst die Begriffe „Geometrie", „Mathematik" und „Wissenschaft" unterliegen der zeitlichen Veränderung. Zum Beispiel spricht man heute von einer „Physikalischen Mathematik", nachdem der Ausdruck „Mathematische Physik" schon länger in Gebrauch ist. Auch die Perfektionierung der elektronischen Rechner könnte zu einer Veränderung des Mathematik-Begriffes führen.

Im Rahmen der Philosophie Sartres lässt sich diese Differenz zwischen Frege und Hilbert durch die Begriffe ‚concept' und ‚notion' ausdrücken. In der Sprache Sartres ausgedrückt wäre die Mathematik im Sinne Hilberts eine ‚notion', kein ‚concept'. In einem Lexikon findet man folgende Erklärung:

> *Sartre macht eine Unterscheidung zwischen concept und notion und identifiziert letztere mit einem Denken in Bewegung, welches sich nach und nach seine Bestimmungen gibt, indem es sich bemüht, das Konkrete zu erreichen. (Dictionnaire Sartre, Übersetzung ins Deutsche: Alfred Dandyk)*

An dieser Formulierung lässt sich der Unterschied zwischen Frege und Hilbert gut erläutern. Das eigentliche Ziel der Mathematik ist das Konkrete. Was das Konkrete sein soll, muss allerdings in jeder Epoche von jedem Individuum neu entschieden werden. Für Frege war es die logische Fundierung der Mathematik, für Hilbert eher die Weiterentwicklung der Mathematik auf praxis-relevanten Gebieten, zum Beispiel der Theorie der Partiellen Differentialgleichungen. Diesem Lebensentwurf entsprechend erhalten die Grundbegriffe der Mathematik eventuell eine neue Bedeutung, so dass sich die Mathematik historisch betrachtet als ein Denken in Bewegung darstellt.

Es sieht so aus, dass Frege diese historische Sichtweise ablehnt. Er sucht kein Denken in Bewegung, sondern ein platonisches Konzept der Mathematik mit Ewigkeitswert. Kompliziert wird die Angelegenheit dadurch, dass Frege nicht ganz im Unrecht ist. Denn die Mathematik spielt eine Sonderrolle in der Geschichte der Wissenschaften: Sie ist in besonderer Weise ein irdisches Bild des platonischen Ideenhimmels. Die Frage ist nur, ob sie ein vollkommenes und vollendetes Bild sein kann oder ob es sich in gewisser Weise doch nur um ein Approximationswissen handelt.

Sartre schreibt zum Problem der Historizität der Mathematik Folgendes:

> *Die euklidische Geometrie, die kartesische Analytik, die newtonsche Physik sind zum Beispiel wahr. Aber ihre Beziehungen zu späteren Wahrheiten sind verschieden. Die Beziehung der euklidischen Geometrie zu nicht-euklidischen Geometrien ist beispielsweise eine Exterioritätsbeziehung…Die newtonsche Physik hingegen ist in die moderne Physik integriert, die ihr, ohne sie zu negieren, eine innere Begrenzung gibt: sie wird zur Physik der Erscheinungen, Physik des Als ob, Physik des Sonderfalls. (Sartre, Wahrheit und Existenz)*

Sartre verbindet hier den mathematischen Platonismus mit der Historizität der Mathematik. Mit anderen Worten: Für ihn stellen die platonische Wahrheit der Mathematik und ihre Historizität keinen Widerspruch dar. Die euklidische Geometrie zum Beispiel ist *wahr* und insofern ist sie ein anschauliches Beispiel für ein platonisches Ideen-System. Es unterliegt keinem Zweifel, dass man das Werk Euklids im Rahmen der Philosophie des Platonismus sehen muss. Insofern ist die Sichtweise Freges nachvollziehbar.

Andererseits sieht man heutzutage die euklidische Geometrie mit anderen Augen als zur Zeit Euklids. Man weiß zum Beispiel, dass es auch nicht-euklidische Geometrien gibt. Man weiß weiterhin, dass man Geometrien unterschiedlicher Dimensionen konstruieren kann, zum Beispiel vier-dimensionale Geometrien, wie sie in der Relativitätstheorie benutzt werden.

Das heißt, die euklidische Geometrie hat ihren Absolutheitsanspruch verloren; sie ist eine Geometrie unter anderen und das verändert auch die Vorstellung darüber, in welchem Sinne die euklidische Geometrie wahr ist und in welchem Sinne nicht. Der Satz des Pythagoras zum Beispiel gilt nur unter bestimmten Bedingungen und nicht in jeder Geometrie.

Obwohl sich innerhalb der euklidischen Geometrie nichts geändert hat, ist sie hinsichtlich ihrer äußeren Beziehungen einer umfassenden Transformation erlegen. Sie steht in Konkurrenz zu anderen Geometrien und sie verfügt nur über einen begrenzten Anwendungsbereich. In einem gewissen Sinne ist sie dieselbe Theorie geblieben, in einem anderen Sinne handelt es sich heute um eine neue Theorie.

Die Mathematiker einer jeden Epoche haben demnach die Aufgabe, das alte Wissen, das in gewisser Hinsicht Ewigkeitswert hat, in die Totalität des zeitgenössischen Wissens zu integrieren und damit zu historisieren. Der Mathematiker hat es also in Wirklichkeit mit der Inkarnation des Ewigen im Zeitlichen zu tun.

Die Schwäche der Sichtweise Freges scheint darin zu liegen, dass er dieses hybride Wesen der Mathematik, das Ewige im Zeitlichen darzustellen, zur Vorgeschichte der Mathematik erklären möchte. Er sieht seine Aufgabe darin, diese Vorgeschichte zu beenden und ein für alle Male der Menschheit zu erklären, was man unter dem Wort ‚Axiom' zu verstehen habe und was eine Definition ist. Es ist diese Verbotsdiktatur Freges, der sich Hilbert entgegenstellt. Was Hegel für die Philosophie beanspruchte, nämlich das Ende derselben, das scheint Frege für die Mathematik zu behaupten. Schluss mit diesem Chaos und dieser Verwirrung in der Mathematik. Jetzt werden die Begriffe definiert und dabei sollte es dann auch bleiben. Basta!